

## Problemas – Tema 1

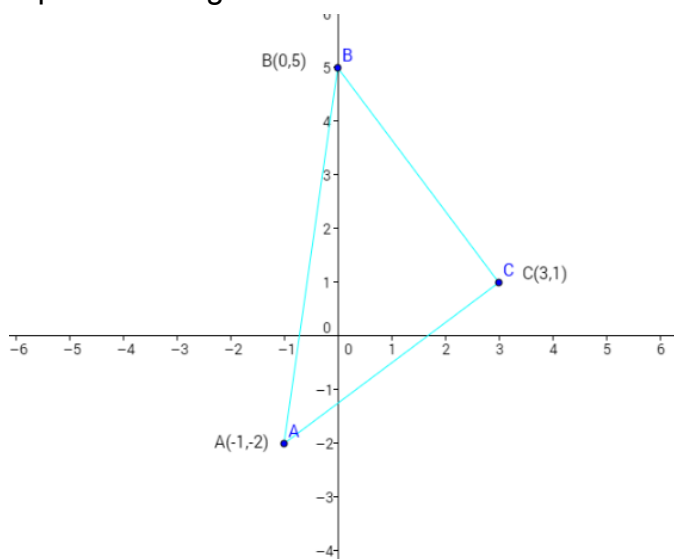
### Solución a problemas de Repaso de Matemáticas I - Hoja 18 - Problemas 2, 3, 5

#### Hoja 18. Problema 2

Resuelto por José Juan Hidalgo Molina (octubre 2014)

2. ¿Qué clase de triángulo determinan los puntos  $A(-1,-2)$ ,  $B(0,5)$ ,  $C(3,1)$  ? Halla la mediana del lado  $\overline{BA}$  (unión del punto medio del lado con el vértice opuesto). Calcula su área.

En primer lugar, para ver la clase de triángulo que determinan estos puntos, vamos a representarlo gráficamente.



$$\vec{AB} = (1, 7) \rightarrow |\vec{AB}| = \sqrt{50}$$

$$\vec{AC} = (4, 3) \rightarrow |\vec{AC}| = \sqrt{25} = 5$$

$$\vec{BC} = (3, -4) \rightarrow |\vec{BC}| = \sqrt{25} = 5$$

Al poseer dos lados de igual longitud, y el tercero distinto, estamos ante un triángulo isósceles.

Además el siguiente producto escalar es nulo  $\rightarrow \vec{AC} \cdot \vec{BC} = 12 - 12 = 0 \rightarrow$  El triángulo es rectángulo en el vértice  $\hat{C}$ .

El punto medio del segmento  $\overline{BA}$  es  $P.M.(\overline{BA}) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ . Y la mediana que buscamos pasa por este punto medio y por el vértice  $C(3,1)$ . Teniendo dos puntos, podemos calcular la ecuación de la recta solución.

$$r: \frac{y-1}{x-3} = \frac{1-\frac{3}{2}}{3+\frac{1}{2}} \rightarrow r: \frac{y-1}{x-3} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{7}{2}} \rightarrow r: \frac{y-1}{x-3} = \frac{-1}{7} \rightarrow r: y = \frac{x}{7} + \frac{10}{7}$$

$$r: x - 7y + 10 = 0 \rightarrow \text{ecuación general de la recta mediana}$$

El área del triángulo, al ser rectángulo, podemos calcularla como:

$$A = \frac{|\vec{AC}| \cdot |\vec{BC}|}{2} = \frac{25}{2} u^2$$

## Hoja 18. Problema 3

### Resuelto por José Juan Hidalgo Molina (octubre 2014)

3. Representa  $y=|-x^2-2x+3|$  .

El valor absoluto coloca en positivo todos los valores negativos de la función  $f(x)=-x^2-2x+3$  . Por lo que vamos a estudiar esta función a trozos, formando los siguientes intervalos:

$$-x^2-2x+3=0 \rightarrow x=-3, x=1$$

$$x < -3 \rightarrow f(-10) < 0 \rightarrow \text{cambiar signo de } f(x)$$

$$-3 < x < 1 \rightarrow f(0) > 0$$

$$1 < x \rightarrow f(10) < 0 \rightarrow \text{cambiar signo de } f(x)$$

Nuestra función a trozos, ya sin valor absoluto, sería:

$$f(x) = \begin{cases} x^2+2x-3 & \text{si } x \leq -3 \\ -x^2-2x+3 & \text{si } -3 < x < 1 \\ x^2+2x-3 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

El dominio es toda la recta real, por ser funciones polinómicas en cada tramo.

$$\text{Puntos de corte con el eje } OX \rightarrow y=0 \rightarrow -x^2-2x+3=0 \rightarrow (-3,0), (1,0)$$

$$\text{Puntos de corte con el eje } OY \rightarrow x=0 \rightarrow (0,3)$$

Al ser polinomios no tenemos asíntotas.

Para estudiar el crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos, hacemos la primera derivada e igualamos a 0 para obtener los puntos críticos. Haremos el estudio distinguiendo los distintos intervalos.

$$x \leq -3 \rightarrow f(x)=x^2+2x-3 \rightarrow f'(x)=2x+2, f'(x)=0 \rightarrow x=-1 \notin (-\infty, -3)$$

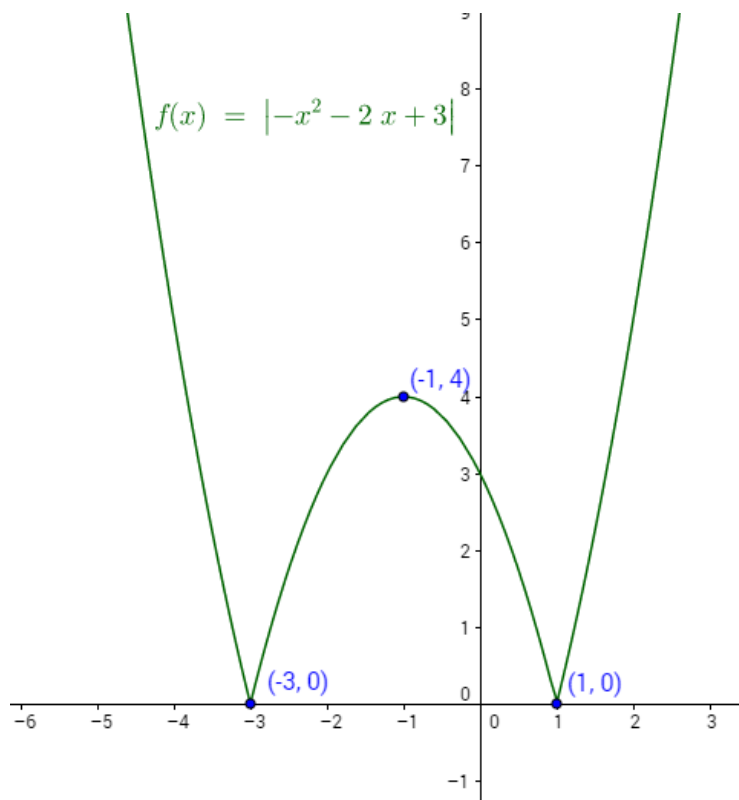
$$-3 < x < 1 \rightarrow f(x)=-x^2-2x+3 \rightarrow f'(x)=-2x-2, f'(x)=0 \rightarrow x=-1$$

$$1 \leq x \rightarrow f(x)=x^2+2x-3 \rightarrow f'(x)=2x+2, f'(x)=0 \rightarrow x=-1 \notin (1, \infty)$$

Tenemos un punto crítico en  $x = -1$  para el intervalo  $-3 < x < 1$ . Calculamos la segunda derivada en este intervalo para determinar si estamos ante un extremo relativo  $\rightarrow f''(x) = -2 < 0 \rightarrow$  máximo relativo  $(-1, 4)$  de la parábola de este intervalo.

Ya tenemos información suficiente para representar la función.

Gráfica de  $f(x) = |-x^2 - 2x + 3|$



## Hoja 18. Problema 5

### Resuelto por Carmen Martín Rubio (septiembre 2014)

5. a) Dibujar la gráfica de la función  $g(x) = e^x - x$

b) Calcular el dominio de definición de  $f(x) = \frac{1}{e^x - x}$  y su comportamiento en el infinito.

c) Determinar (si existen) los máximos y mínimos absolutos de  $f(x)$  en su dominio de definición.

a)  $Dom(g(x)) = \mathbb{R}$

Corte eje  $OX \rightarrow y=0 \rightarrow e^x - x = 0 \rightarrow$  no tiene solución real

Corte eje  $OY \rightarrow x=0 \rightarrow (0,1)$

Como el dominio son todos los reales, estudiamos la existencia de asíntotas horizontales.

$\lim_{x \rightarrow \infty} (e^x - x) = \infty - \infty \rightarrow$  Indeterminación  $\rightarrow$  Multiplicamos y dividimos por conjugado  $\rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (e^x - x) \cdot \frac{(e^x + x)}{e^x + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2x} + x^2}{e^x + x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - x) = 0 + \infty = +\infty$$

No hay asíntotas horizontales, y tampoco oblicuas como se comprueba de:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{e^x}{x} - 1 \right) = +\infty \rightarrow \text{No existe asíntotas oblicuas.}$$

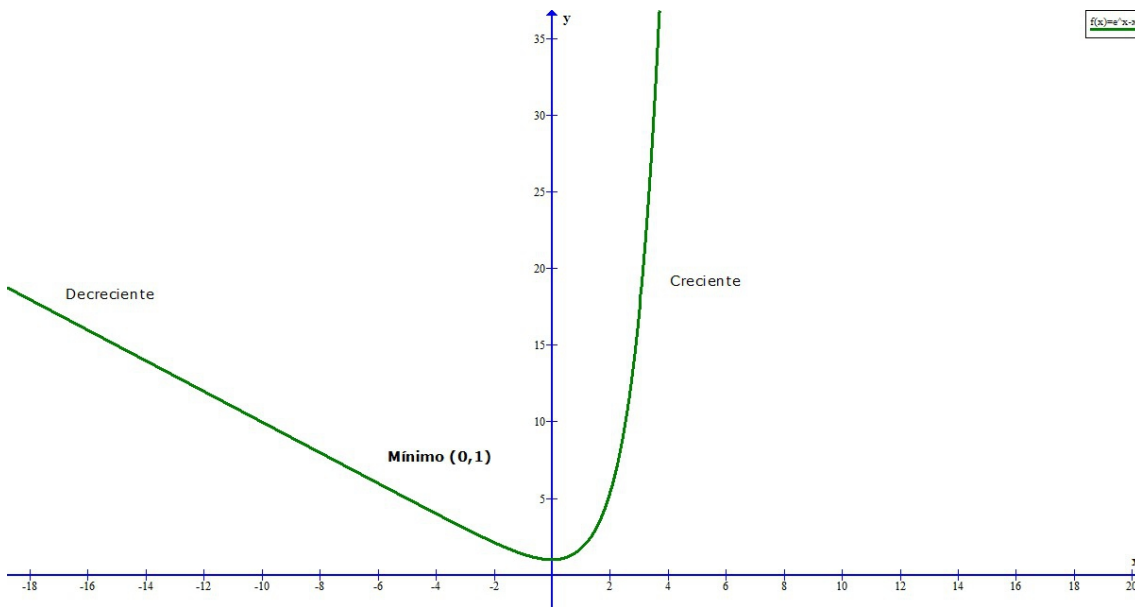
Calculamos la primera derivada.

$$g(x) = e^x - x \rightarrow g'(x) = e^x - 1, \quad g'(x) = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0,1) \rightarrow \text{punto crítico}$$

$$g''(x) = e^x, \quad g''(0) = 1 > 0 \rightarrow (0,1) \text{ es un mínimo relativo}$$

Utilizamos la segunda derivada para estimar la existencia de puntos de inflexión.

$g''(x) = e^x$  ,  $g''(x) = 0 \rightarrow$  La segunda derivada no se anula para ningún valor real



b)  $f(x) = \frac{1}{e^x - x}$

$Dom(f(x)) = \mathbb{R} \rightarrow$  El denominador nunca se anula

Aplicando el resultado de los límites del apartado anterior, podemos concluir:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x - x} = 0 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x - x} = 0$$

c)  $f(x) = \frac{1}{e^x - x} \rightarrow f'(x) = \frac{-e^x + 1}{(e^x - x)^2}$  ,  $f'(x) = 0 \rightarrow e^x = 1 \rightarrow x = 0 \rightarrow$  punto crítico

$$f''(x) = \frac{-e^x(e^x - x)^2 - (-e^x + 1)2(e^x - x)(e^x - 1)}{(e^x - x)^4}$$

$$f''(x) = \frac{-e^x(e^x - x) - (-e^x + 1)2(e^x - 1)}{(e^x - x)^3} = \frac{-e^x(e^x - x) + 2(e^x - 1)}{(e^x - x)^3}$$

$f''(0) = -1 < 0 \rightarrow (0, 1)$  máximo relativo

