Problemas – Tema 1

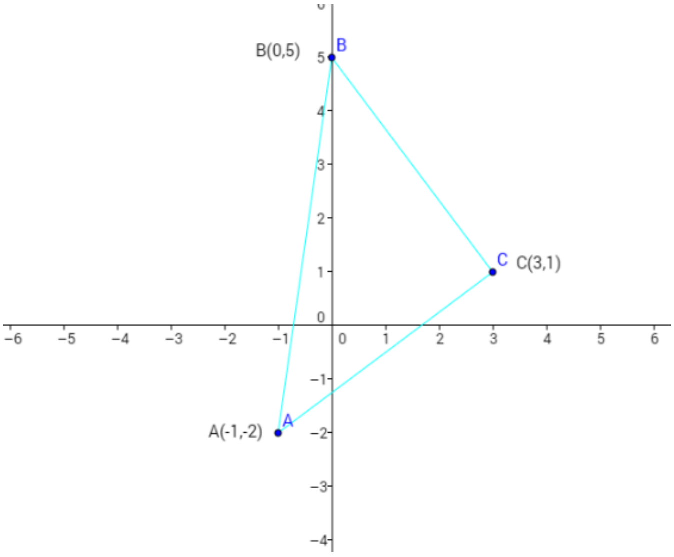
Solución a problemas de Repaso de Matemáticas I - Hoja 18 - Problemas 2, 3, 5

Hoja 18. Problema 2

Resuelto por José Juan Hidalgo Molina (octubre 2014)

2. ¿Qué clase de triángulo determinan los puntos $A(-1,-2), B(0,5), C(3,1)$? Halla la mediana del lado $\overline{BA}$ (unión del punto medio del lado con el vértice opuesto). Calcula su área.

En primer lugar, para ver la clase de triángulo que determinan estos puntos, vamos a representarlo gráficamente.



$$\vec{AB}=(1,7) \quad \rightarrow \quad |\vec{AB}|=\sqrt{50}$$
$$\vec{AC}=(4,3) \quad \rightarrow \quad |\vec{AC}|=\sqrt{25}=5$$
$$\vec{BC}=(3,-4) \quad \rightarrow \quad |\vec{BC}|=\sqrt{25}=5$$

Al poseer dos lados de igual longitud, y el tercero distinto, estamos ante un triángulo isósceles.

Además el siguiente producto escalar es nulo → $\vec{AC}\cdot\vec{BC}=12-12=0$ → El triángulo es rectángulo en el vértice $\hat{C}$.

El punto medio del segmento $\overline{BA}$ es $P.M.(\overline{BA})=(\frac{-1}{2},\frac{3}{2})$. Y la mediana que buscamos pasa por este punto medio y por el vértice $C(3,1)$. Teniendo dos puntos, podemos calcular la ecuación de la recta solución.

$$r:\frac{y-1}{x-3}=\frac{1-\frac{3}{2}}{3+\frac{1}{2}} \rightarrow r:\frac{y-1}{x-3}=\frac{\frac{-1}{2}}{\frac{7}{2}} \rightarrow r:\frac{y-1}{x-3}=\frac{-1}{7} \rightarrow r:y=-\frac{x}{7}+\frac{10}{7}$$

$r:x+7y-10=0$ → ecuación general de la recta mediana

El área del triángulo, al ser rectángulo, podemos calcularla como:

$$A=\frac{|\vec{AC}|\cdot|\vec{BC}|}{2}=\frac{25}{2}\ u^2$$

Hoja 18. Problema 3

Resuelto por José Juan Hidalgo Molina (octubre 2014)

3. Representa $y=|-x^2-2x+3|$ **.**

El valor absoluto coloca en positivo todos los valores negativos de la función $f(x)=-x^2-2x+3$. Por lo que vamos a estudiar esta función a trozos, formando los siguientes intervalos:

$-x^2-2x+3=0 \rightarrow x=-3 \ , \ x=1$

$x<-3 \rightarrow f(-10)<0$ → cambiar signo de $f(x)$

$-3<x<1 \rightarrow f(0)>0$

$1<x \rightarrow f(10)<0$ → cambiar signo de $f(x)$

Nuestra función a trozos, ya sin valor absoluto, sería:

$$f(x)=\begin{Bmatrix} x^2+2x-3 & si & x\leq-3 \\ -x^2-2x+3 & si & -3<x<1 \\ x^2+2x-3 & si & 1\leq x \end{Bmatrix}$$

El dominio es toda la recta real, por ser funciones polinómicas en cada tramo.

Puntos de corte con el eje $OX \rightarrow y=0 \rightarrow -x^2-2x+3=0 \rightarrow (-3,0),(1,0)$

Puntos de corte con el eje $OY \rightarrow x=0 \rightarrow (0,3)$

Al ser polinomios no tenemos asíntotas.

Para estudiar el crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos, hacemos la primera derivada e igualamos a 0 para obtener los puntos críticos. Haremos el estudio distinguiendo los distintos intervalos.

$x\leq-3 \rightarrow f(x)=x^2+2x-3 \rightarrow f'(x)=2x+2 \ , \ f'(x)=0 \rightarrow x=-1\notin(-\infty,-3)$

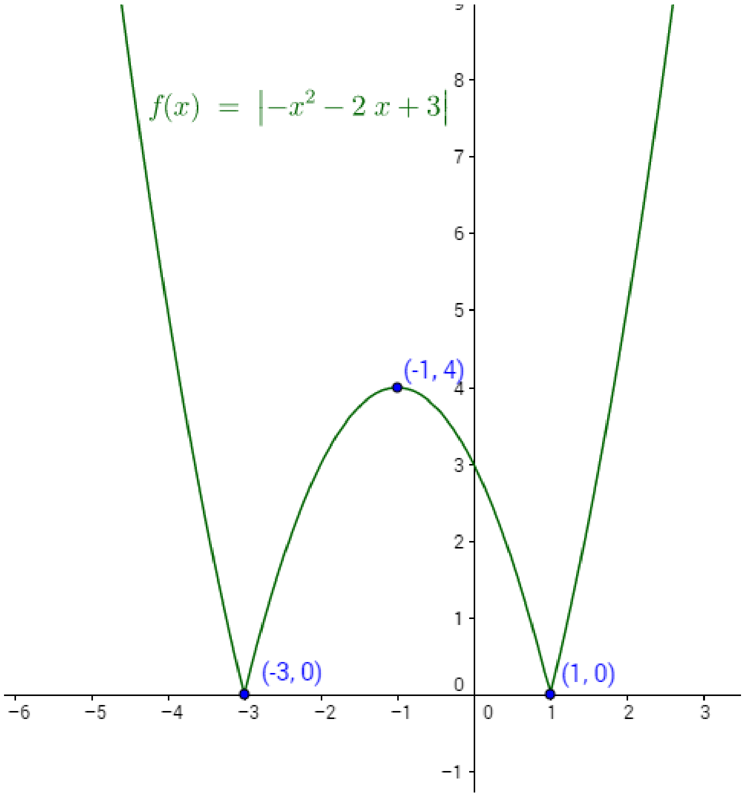
$-3<x<1 \rightarrow f(x)=-x^2-2x+3 \rightarrow f'(x)=-2x-2 \ , \ f'(x)=0 \rightarrow x=-1$

$1\leq x \rightarrow f(x)=x^2+2x-3 \rightarrow f'(x)=2x+2 \ , \ f'(x)=0 \rightarrow x=-1\notin(1,\infty)$

Tenemos un punto crítico en $x=-1$ para el intervalo $-3<x<1$. Calculamos la segunda derivada en este intervalo para determinar si estamos ante un extremo relativo → $f''(x)=-2<0$ → máximo relativo $(-1,4)$ de la parábola de este intervalo.

Ya tenemos información suficiente para representar la función.

Gráfica de $f(x)=|-x^2-2x+3|$



Hoja 18. Problema 5

Resuelto por Carmen Martín Rubio (septiembre 2014)

5. a) Dibujar la gráfica de la función $g(x)=e^x-x$

b) Calcular el dominio de definición de $f(x)=\dfrac{1}{e^x-x}$ **y su comportamiento en el infinito.**

c) Determinar (si existen) los máximos y mínimos absolutos de $f(x)$ **en su dominio de definición.**

a) $Dom(g(x))=\mathbb{R}$

Corte eje OX $\rightarrow$ $y=0$ $\rightarrow$ $e^x-x=0$ $\rightarrow$ no tiene solución real

Corte eje OY $\rightarrow$ $x=0$ $\rightarrow$ $(0,1)$

Como el dominio son todos los reales, estudiamos la existencia de asíntotas horizontales.

$\lim_{x\to\infty}(e^x-x)=\infty-\infty$ $\rightarrow$ Indeterminación $\rightarrow$ Multiplicamos y dividimos por conjugado $\rightarrow$

$$\lim_{x\to\infty}(e^x-x)\cdot\frac{(e^x+x)}{e^x+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{2x}+x^2}{e^x+x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}(e^x-x)=0+\infty=+\infty$$

No hay asíntotas horizontales, y tampoco oblicuas como se comprueba de:

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{e^x-x}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{e^x}{x}-1\right)=+\infty$ $\rightarrow$ No existe asíntotas oblicuas.

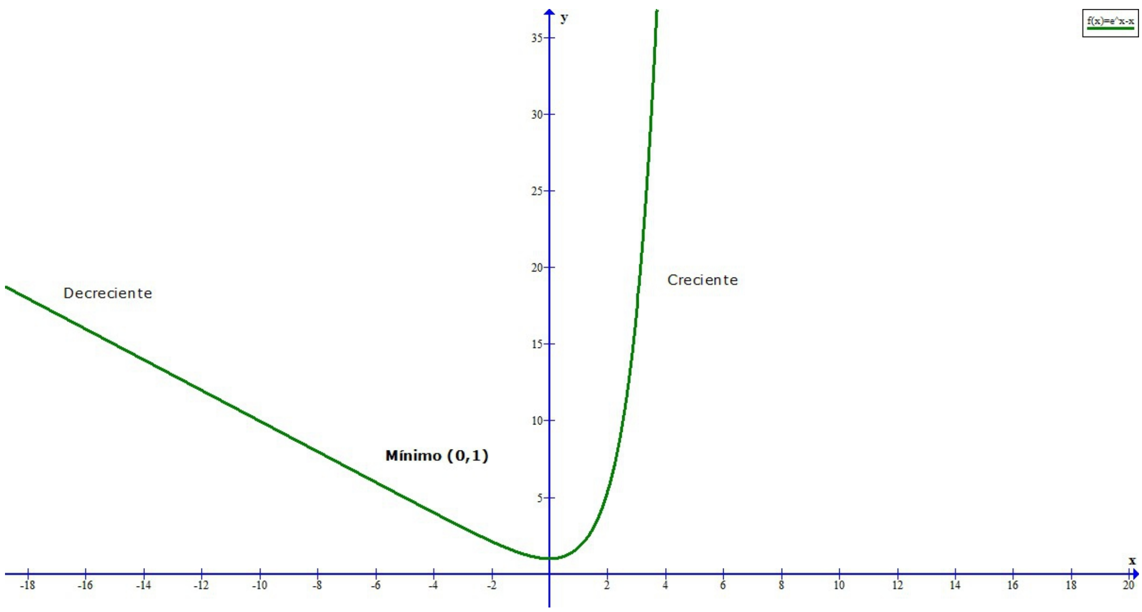
Calculamos la primera derivada.

$g(x)=e^x-x$ $\rightarrow$ $g'(x)=e^x-1$, $g'(x)=0$ $\rightarrow$ $x=0$ $\rightarrow$ $(0,1)$ $\rightarrow$ punto crítico

$g''(x)=e^x$, $g''(0)=1>0$ $\rightarrow$ $(0,1)$ es un mínimo relativo

Utilizamos la segunda derivada para estimar la existencia de puntos de inflexión.

$g''(x)=e^x$, $g''(x)=0$ → La segunda derivada no se anula para ningún valor real



b) $f(x)=\dfrac{1}{e^x-x}$

$Dom(f(x))=\mathbb{R}$ → El denominador nunca se anula

Aplicando el resultado de los límites del apartado anterior, podemos concluir:

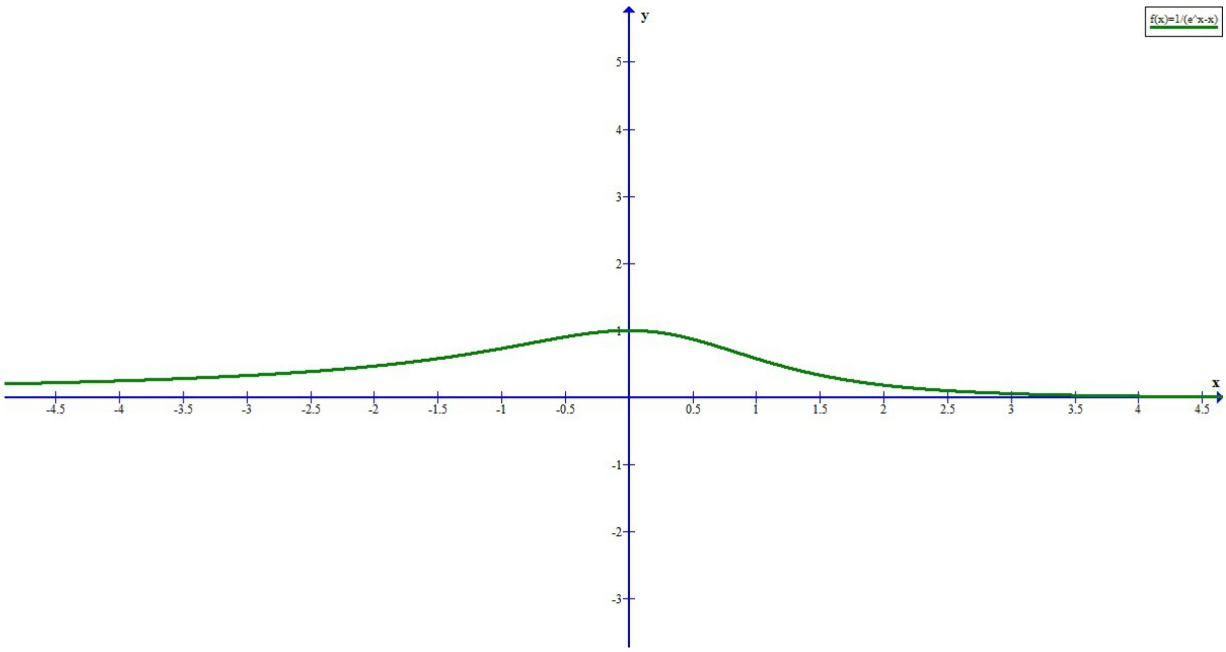
$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{e^x-x}=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{e^x-x}=0$

c) $f(x)=\dfrac{1}{e^x-x}$ → $f'(x)=\dfrac{-e^x+1}{(e^x-x)^2}$, $f'(x)=0$ → $e^x=1$ → $x=0$ → punto crítico

$$f''(x)=\frac{-e^x(e^x-x)^2-(-e^x+1)2(e^x-x)(e^x-1)}{(e^x-x)^4}$$

$$f''(x)=\frac{-e^x(e^x-x)-(-e^x+1)2(e^x-1)}{(e^x-x)^3}=\frac{-e^x(e^x-x)+2(e^x-1)}{(e^x-x)^3}$$

$f''(0)=-1<0$ → $(0,1)$ máximo relativo


y
x
f(x)=1/(e^x-x)
5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4.5
-4
-3.5
-3
-2.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5