Problemas – Tema 1

Solución a problemas de Repaso de Matemáticas I - Hoja 16 - Problemas 3, 4, 5, 7

Hoja 16. Problema 3

Resuelto por Gloria Corpas (octubre 2014)

3. Representa $y=x^3-4x$ **.**

Dominio de la función → $Dom(f)=\mathbb{R}$

Corte con los ejes.

Eje OX → $y=0$ → $0=x^3-4x$ → $(-2,0),(0,0),(2,0)$

Eje OY → $x=0$ → $(0,0)$

Simetría → $f(x)=-f(-x)$ → impar (simétrica respecto al origen)

No existen asíntotas por ser polinómica.

Máximos y mínimos relativos → $y'=3x^2-4$, $y'=0$ → $x=\frac{\pm 2\sqrt{3}}{3}$ → puntos críticos

Evaluamos la segunda derivada en los puntos críticos.

$y''=6x$

$y''(\frac{2\sqrt{3}}{3})>0$ → $x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ mínimo relativo → $(\frac{2\sqrt{3}}{3}, -3{,}07)$

$y''(\frac{-2\sqrt{3}}{3})<0$ → $x=\frac{-2\sqrt{3}}{3}$ máximo relativo → $(\frac{-2\sqrt{3}}{3}, 3{,}07)$

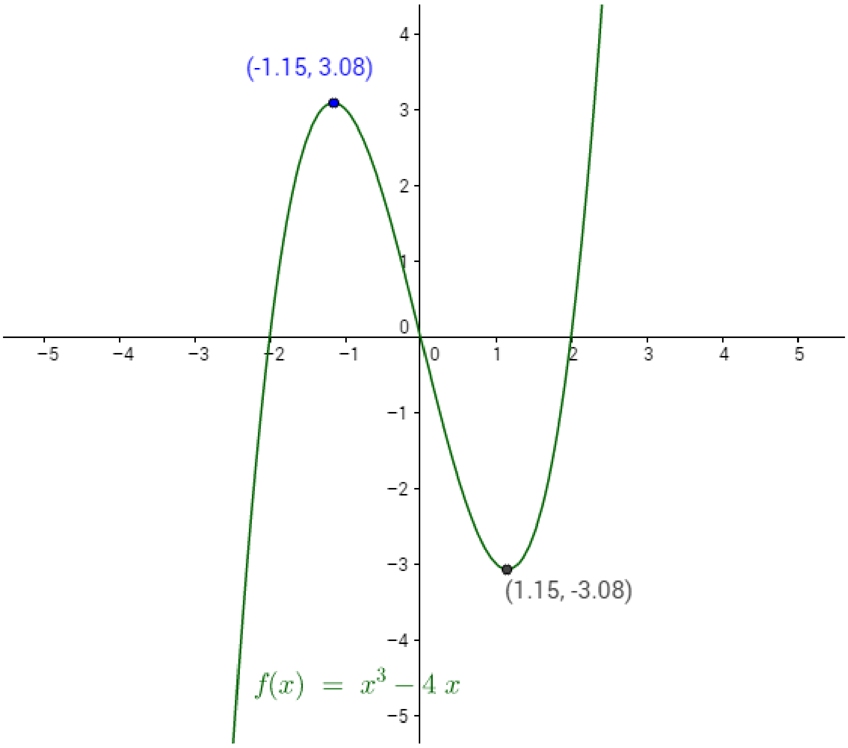
Curvatura → $y''=6x$, $y''=0$ → $x=0$ → candidato a punto de inflexión

$-\infty<x<0$ → $y''(-10)<0$ → cóncava hacia abajo ∩

$0<x<\infty$ → $y''(10)>0$ → cóncava hacia arriba U

Tenemos un punto de inflexión en $(0,0)$.

Gráfica de $y=x^3-4x$



Hoja 16. Problema 4

Resuelto por Nicolás Carrillo (octubre 2014)

4. Representa $y=\dfrac{1}{x^2-1}$ **.**

Dominio de la función → $Dom(f)=\mathbb{R}-\{-1,1\}$

Corte con los ejes.

Eje OX → $y=0$ → $1\neq 0$ → absurdo matemático

Eje OY → $x=0$ → $y=-1$ → $(0,-1)$

Simetría → $f(x)=f(-x)$ → par (simétrica respecto al eje OY)

$\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{1}{x^2-1}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{1}{x^2-1}=\infty$ → asíntota vertical en $x=-1$

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x^2-1}=\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x^2-1}=-\infty$ → asíntota vertical en $x=1$

$\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{1}{x^2-1}=0$, $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1}{x^2-1}=0$ → asíntota horizontal en $y=0$

Al existir asíntota horizontal, no hay oblicua.

Calculamos la primera derivada.

$f'(x)=\dfrac{2x}{(x^2-1)^2}$, $f'(x)=0$ → $x=0$ → punto crítico

Función $f(x)$	$f(x)\uparrow$	$f(x)\uparrow$	$f(x)\downarrow$	$f(x)\downarrow$
Intervalos	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
Derivada $f'(x)$	$f'(-10)>0$	$f'(\frac{-1}{2})>0$	$f'(\frac{1}{2})<0$	$f'(10)<0$

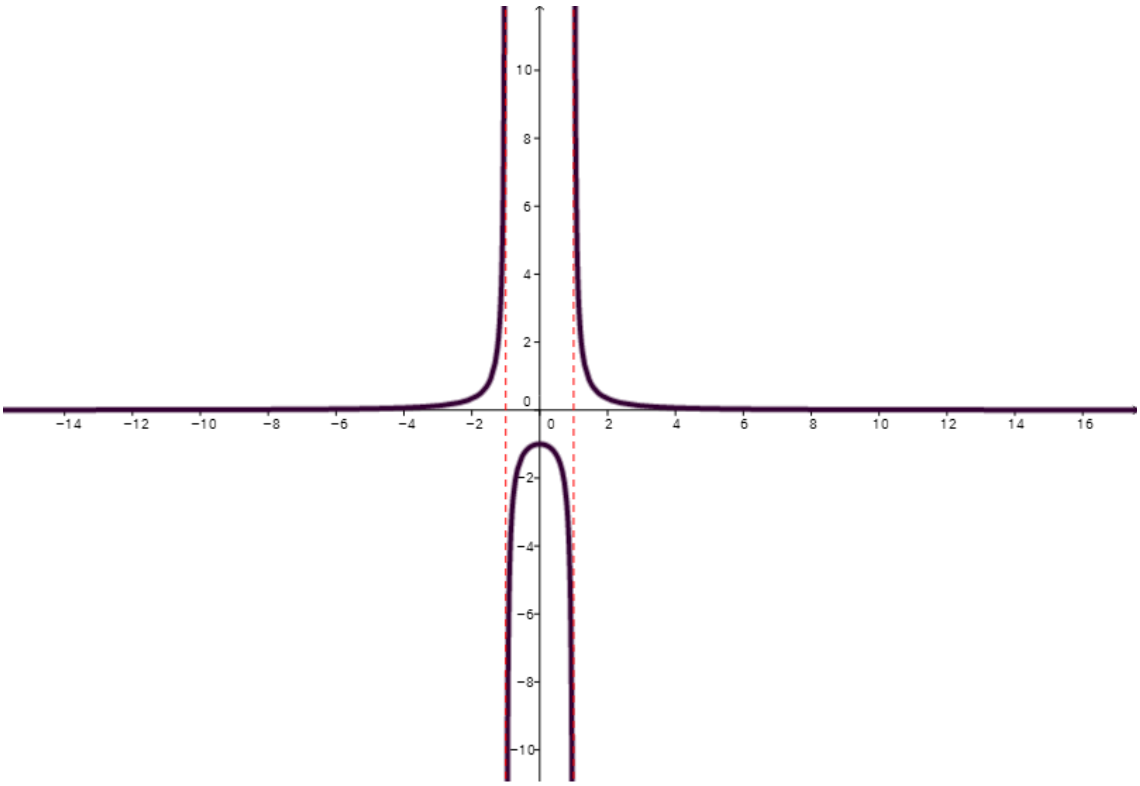
Calculamos la segunda derivada.

$$f'(x)=\frac{2x}{(x^2-1)^2} \rightarrow f''(x)=\frac{2(x^2-1)^2-2x2(x^2-1)2x}{(x^2-1)^4} \rightarrow f''(x)=\frac{2(x^2-1)-8x^2}{(x^2-1)^3}$$

$$f''(x)=\frac{-6x^2-2}{(x^2-1)^3} \rightarrow f''(x)=-2\cdot\frac{3x^2+1}{(x^2-1)^3} \quad , \quad f''(x)=0 \rightarrow x=\sqrt{\frac{-1}{3}} \notin \mathbb{R}$$

Por lo tanto, no existen puntos de inflexión.

Gráfica de $y=\frac{1}{x^2-1}$



Hoja 16. Problema 5

Resuelto por Pedro Macías (octubre 2014)

5. Representa $y=x^4-6x^2+5$ **.**

Dominio de la función → $Dom(f)=\mathbb{R}$

Corte con los ejes.

Eje OX → $y=0$ → $0=x^4-6x^2+5$ → $(-\sqrt{5},0),(-1,0),(1,0),(\sqrt{5},0)$

Eje OY → $x=0$ → $(0,5)$

Simetría → $f(x)=f(-x)$ → par (simétrica respecto al eje OY)

No existen asíntotas por ser polinómica.

Calculamos la primera derivada.

$y=x^4-6x^2+5$

$y'=4x^3-12x$, $y'=0$ → $x=-\sqrt{3}$, $x=0$, $x=\sqrt{3}$ → puntos críticos

Para saber si son máximos o mínimos, evaluamos la segunda derivada en los puntos críticos.

$y''=12x^2-12$

$y''(-\sqrt{3})>0$ → $x=-\sqrt{3}$ es máximo → $(-\sqrt{3},4)$

$y''(0)=-12<0$ → $x=0$ es mínimo → $(0,5)$

$y''(\sqrt{3})>0$ → $x=\sqrt{3}$ es máximo → $(\sqrt{3},4)$

Para estudiar la concavidad y convexidad anulamos la segunda derivada, para obtener los candidatos a puntos de inflexión.

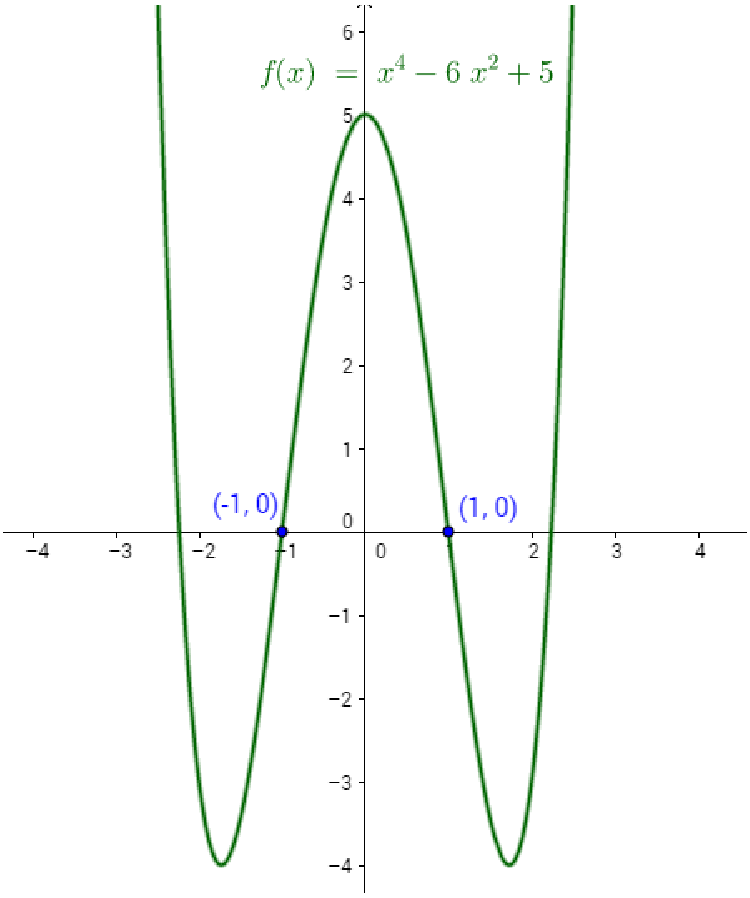
$y''=12x^2-12$, $y''=0$ → $x=\pm 1$

Evaluamos la segunda derivada en los siguientes intervalos.

Función $f(x)$	$f(x)\cup$	$f(x)\cap$	$f(x)\cup$
Intervalos	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,+\infty)$
Segunda derivada $f'(x)$	$f''(-10)>0$	$f'(0)<0$	$f''(10)>0$

Por lo tanto, los puntos $(-1,0)$ y $(1,0)$ son puntos de inflexión.

Gráfica de $f(x)=x^4-6x^2+5$



Hoja 16. Problema 7

Resuelto por María Olivares (septiembre 2014)

7. Representa $y=\frac{(x-2)^2}{x-3}$ **.**

La función es continua en $\mathbb{R}-\{3\}$.

Corte con eje $OY \rightarrow x=0 \rightarrow (0,\frac{-4}{3})$

Corte con eje $OX \rightarrow y=0 \rightarrow (2,0)$

La función no es simétrica.

Estudiamos las asíntotas.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-4x+4}{x-3}=\frac{9-12+4}{0}=\infty \rightarrow \lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-4x+4}{x-3}=-\infty \ , \ \lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-4x+4}{x-3}=+\infty$$

Existe asíntota vertical en $x=3$.

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4x+4}{x-3}=\infty \rightarrow$ no existen asíntotas horizontales

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4x+4}{x(x-3)}=1 \rightarrow m=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\infty}(\frac{x^2-4x+4}{x-3}-x)=\lim_{x\to\infty}(\frac{-x+4}{x-3})=-1 \rightarrow n=-1$$

Es decir, existe una asíntota horizontal en $y=x-1$.

Estudiamos los intervalos de crecimiento y decrecimiento, calculando la primera derivada, igualando a cero y obteniendo los puntos críticos.

$$f(x)=\frac{(x-2)^2}{x-3} \rightarrow f(x)=\frac{2(x-2)(x-3)-(x-2)^2}{(x-3)^2} \rightarrow f'(x)=\frac{x^2-6x+8}{(x-3)^2}$$

$f'(x)=0 \rightarrow x^2-6x+8=0 \rightarrow x=2 \ , \ x=4$

Hacemos intervalos con los valores críticos y los puntos donde no está definida la función.

Función $f(x)$	$f(x)\uparrow$	$f(x)\downarrow$	$f(x)\downarrow$	$f(x)\uparrow$
Intervalos	$(-\infty,2)$	$(2,3)$	$(3,4)$	$(4,+\infty)$
Derivada $f'(x)$	$f'(0)>0$	$f'(\frac{5}{2})<0$	$f'(\frac{7}{2})<0$	$f'(10)>0$

Tenemos un máximo en $(2,0)$ y un mínimo en $(4,4)$.

Calculamos la segunda derivada para estudiar la curvatura.

$$f'(x)=\frac{x^2-6x+8}{(x-3)^2} \rightarrow f''(x)=\frac{(2x-6)(x-3)^2-(x^2-6x+8)2(x-3)}{(x-3)^4}$$

$$f''(x)=\frac{(2x-6)(x-3)-2(x^2-6x+8)}{(x-3)^3} \rightarrow f''(x)=\frac{2}{(x-3)^3}$$

$f''(x)=0 \rightarrow 2=0$ → absurdo matemático → no existen puntos de inflexión

Podemos evaluar la segunda derivada a la izquierda y a la derecha de $x=3$, donde no está definida la función, para determinar la curvatura.

$-\infty<x<3 \rightarrow f''(0)<0 \rightarrow f(x)\cap$

$3<x<\infty \rightarrow f''(10)>0 \rightarrow f(x)\cup$

Ya tenemos información suficiente para representar la gráfica.

$$Gráfica\ \ de\ \ f(x)=\frac{(x-2)^2}{x-3}$$