

Problemas – Tema 1

Solución a problemas de Repaso de Matemáticas I - Hoja 16 - Problemas 3, 4, 5, 7

Hoja 16. Problema 3

Resuelto por Gloria Corpas (octubre 2014)

3. Representa $y = x^3 - 4x$.

Dominio de la función $\rightarrow Dom(f) = \mathbb{R}$

Corte con los ejes.

Eje $OX \rightarrow y = 0 \rightarrow 0 = x^3 - 4x \rightarrow (-2, 0), (0, 0), (2, 0)$

Eje $OY \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$

Simetría $\rightarrow f(x) = -f(-x) \rightarrow$ impar (simétrica respecto al origen)

No existen asíntotas por ser polinómica.

Máximos y mínimos relativos $\rightarrow y' = 3x^2 - 4$, $y' = 0 \rightarrow x = \frac{\pm 2\sqrt{3}}{3} \rightarrow$ puntos críticos

Evaluamos la segunda derivada en los puntos críticos.

$$y'' = 6x$$

$$y''\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) > 0 \rightarrow x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ mínimo relativo} \rightarrow \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, -3,07\right)$$

$$y''\left(\frac{-2\sqrt{3}}{3}\right) < 0 \rightarrow x = \frac{-2\sqrt{3}}{3} \text{ máximo relativo} \rightarrow \left(\frac{-2\sqrt{3}}{3}, 3,07\right)$$

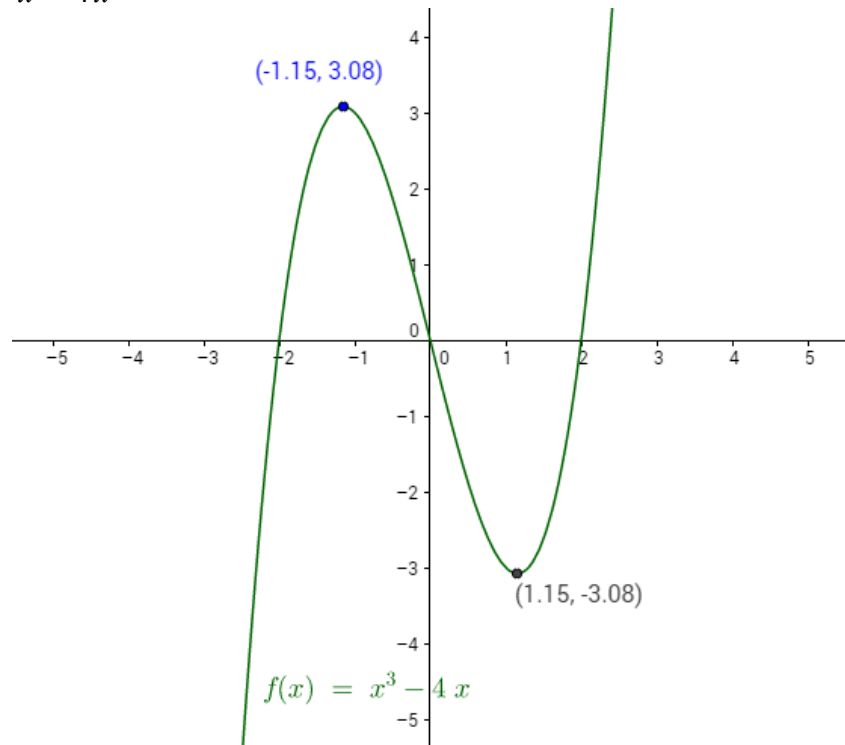
Curvatura $\rightarrow y'' = 6x$, $y'' = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow$ candidato a punto de inflexión

$$-\infty < x < 0 \rightarrow y''(-10) < 0 \rightarrow \text{cóncava hacia abajo } \cap$$

$$0 < x < \infty \rightarrow y''(10) > 0 \rightarrow \text{cóncava hacia arriba } \cup$$

Tenemos un punto de inflexión en $(0, 0)$.

Gráfica de $y=x^3-4x$



Hoja 16. Problema 4

Resuelto por Nicolás Carrillo (octubre 2014)

4. Representa $y = \frac{1}{x^2 - 1}$.

Dominio de la función $\rightarrow Dom(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

Corte con los ejes.

Eje $OX \rightarrow y = 0 \rightarrow 1 \neq 0 \rightarrow$ absurdo matemático

Eje $OY \rightarrow x = 0 \rightarrow y = -1 \rightarrow (0, -1)$

Simetría $\rightarrow f(x) = f(-x) \rightarrow$ par (simétrica respecto al eje OY)

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x^2 - 1} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{x^2 - 1} = \infty \rightarrow \text{asíntota vertical en } x = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x^2 - 1} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x^2 - 1} = -\infty \rightarrow \text{asíntota vertical en } x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 - 1} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2 - 1} = 0 \rightarrow \text{asíntota horizontal en } y = 0$$

Al existir asíntota horizontal, no hay oblicua.

Calculamos la primera derivada.

$$f'(x) = \frac{2x}{(x^2 - 1)^2}, \quad f'(x) = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow \text{punto crítico}$$

Función $f(x)$	$f(x) \uparrow$	$f(x) \uparrow$	$f(x) \downarrow$	$f(x) \downarrow$
Intervalos	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
Derivada $f'(x)$	$f'(-10) > 0$	$f'(\frac{-1}{2}) > 0$	$f'(\frac{1}{2}) < 0$	$f'(10) < 0$

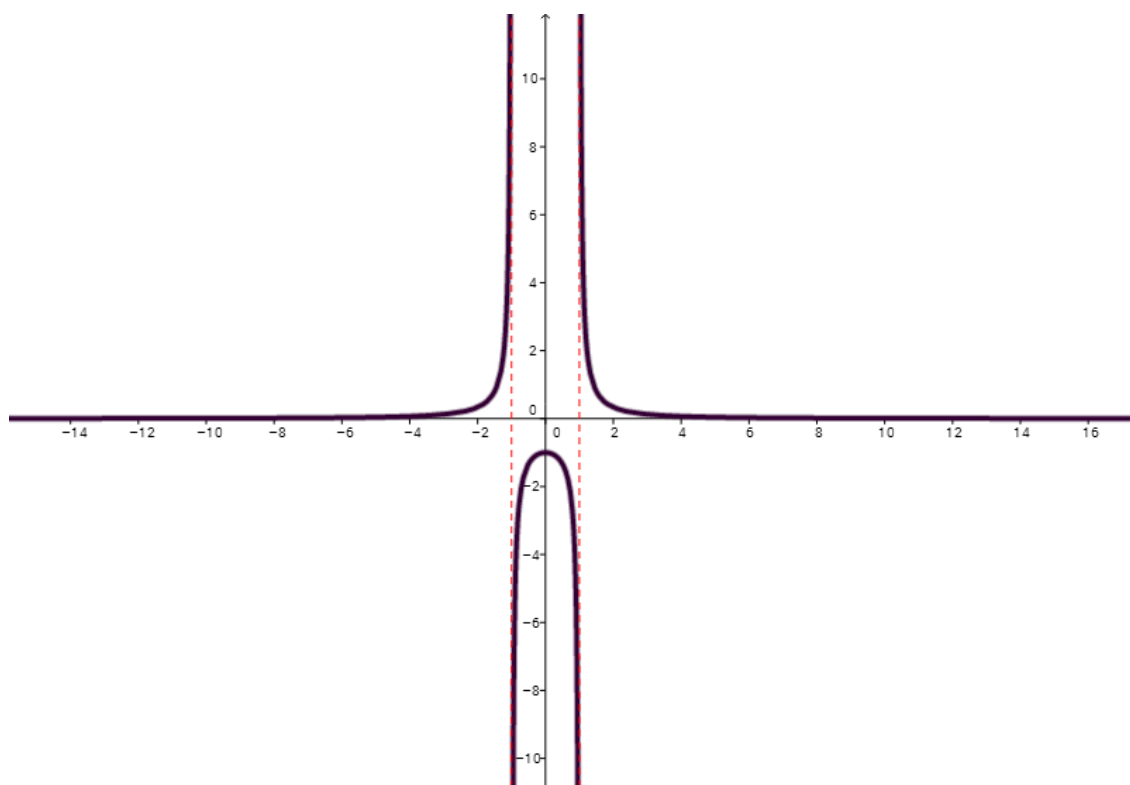
Calculamos la segunda derivada.

$$f'(x) = \frac{2x}{(x^2-1)^2} \rightarrow f''(x) = \frac{2(x^2-1)^2 - 2x \cdot 2(x^2-1) \cdot 2x}{(x^2-1)^4} \rightarrow f''(x) = \frac{2(x^2-1) - 8x^2}{(x^2-1)^3}$$

$$f''(x) = \frac{-6x^2-2}{(x^2-1)^3} \rightarrow f''(x) = -2 \cdot \frac{3x^2+1}{(x^2-1)^3}, \quad f''(x) = 0 \rightarrow x = \sqrt{\frac{-1}{3}} \notin \mathbb{R}$$

Por lo tanto, no existen puntos de inflexión.

Gráfica de $y = \frac{1}{x^2-1}$



Hoja 16. Problema 5

Resuelto por Pedro Macías (octubre 2014)

5. Representa $y=x^4-6x^2+5$.

Dominio de la función $\rightarrow Dom(f)=\mathbb{R}$

Corte con los ejes.

Eje $OX \rightarrow y=0 \rightarrow 0=x^4-6x^2+5 \rightarrow (-\sqrt{5},0),(-1,0),(1,0),(\sqrt{5},0)$

Eje $OY \rightarrow x=0 \rightarrow (0,5)$

Simetría $\rightarrow f(x)=f(-x) \rightarrow$ par (simétrica respecto al eje OY)

No existen asíntotas por ser polinómica.

Calculamos la primera derivada.

$$y=x^4-6x^2+5$$

$$y'=4x^3-12x, \quad y'=0 \rightarrow x=-\sqrt{3}, \quad x=0, \quad x=\sqrt{3} \rightarrow \text{puntos críticos}$$

Para saber si son máximos o mínimos, evaluamos la segunda derivada en los puntos críticos.

$$y''=12x^2-12$$

$$y''(-\sqrt{3})>0 \rightarrow x=-\sqrt{3} \text{ es máximo} \rightarrow (-\sqrt{3},4)$$

$$y''(0)=-12<0 \rightarrow x=0 \text{ es mínimo} \rightarrow (0,5)$$

$$y''(\sqrt{3})>0 \rightarrow x=\sqrt{3} \text{ es máximo} \rightarrow (\sqrt{3},4)$$

Para estudiar la concavidad y convexidad anulamos la segunda derivada, para obtener los candidatos a puntos de inflexión.

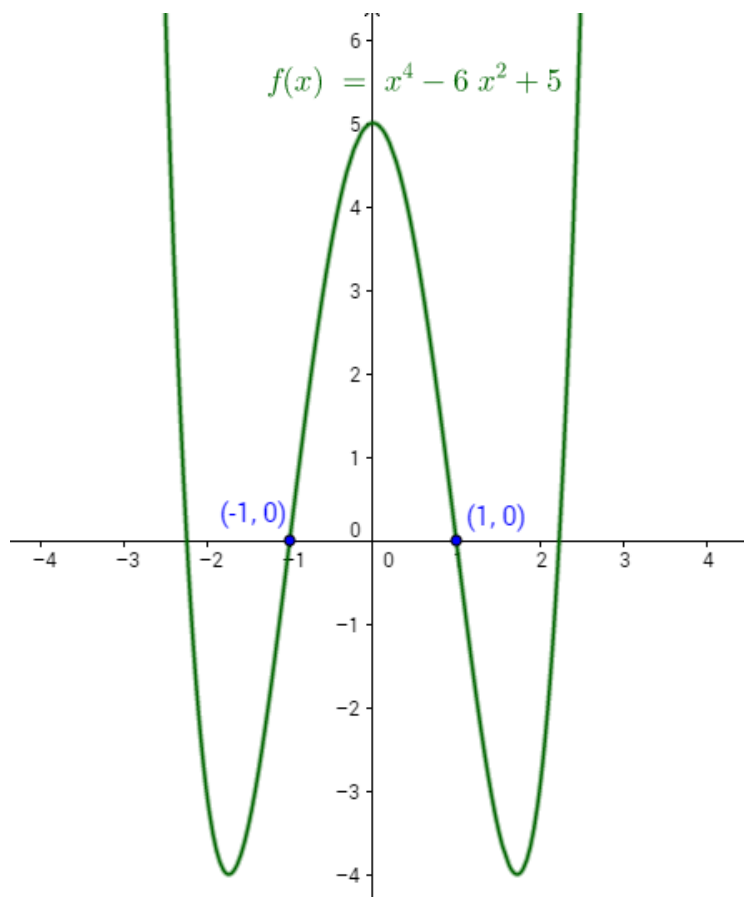
$$y''=12x^2-12, \quad y''=0 \rightarrow x=\pm 1$$

Evaluamos la segunda derivada en los siguientes intervalos.

Función $f(x)$	$f'(x) \cup$	$f'(x) \cap$	$f'(x) \cup$
Intervalos	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
Segunda derivada $f''(x)$	$f''(-1) > 0$	$f''(0) < 0$	$f''(1) > 0$

Por lo tanto, los puntos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$ son puntos de inflexión.

Gráfica de $f(x) = x^4 - 6x^2 + 5$



Hoja 16. Problema 7

Resuelto por María Olivares (septiembre 2014)

7. Representa $y = \frac{(x-2)^2}{x-3}$.

La función es continua en $\mathbb{R} - \{3\}$.

Corte con eje $OY \rightarrow x=0 \rightarrow (0, \frac{-4}{3})$

Corte con eje $OX \rightarrow y=0 \rightarrow (2,0)$

La función no es simétrica.

Estudiamos las asíntotas.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 3} = \frac{9 - 12 + 4}{0} = \infty \rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 3} = -\infty, \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 3} = +\infty$$

Existe asíntota vertical en $x=3$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 3} = \infty \rightarrow \text{no existen asíntotas horizontales}$$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4x + 4}{x(x-3)} = 1 \rightarrow m = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 4x + 4}{x - 3} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-x + 4}{x - 3} \right) = -1 \rightarrow n = -1$$

Es decir, existe una asíntota horizontal en $y = x - 1$.

Estudiamos los intervalos de crecimiento y decrecimiento, calculando la primera derivada, igualando a cero y obteniendo los puntos críticos.

$$f(x) = \frac{(x-2)^2}{x-3} \rightarrow f'(x) = \frac{2(x-2)(x-3) - (x-2)^2}{(x-3)^2} \rightarrow f'(x) = \frac{x^2 - 6x + 8}{(x-3)^2}$$

$$f'(x)=0 \rightarrow x^2-6x+8=0 \rightarrow x=2, x=4$$

Hacemos intervalos con los valores críticos y los puntos donde no está definida la función.

Función $f(x)$	$f(x) \uparrow$	$f(x) \downarrow$	$f(x) \downarrow$	$f(x) \uparrow$
Intervalos	$(-\infty, 2)$	$(2, 3)$	$(3, 4)$	$(4, +\infty)$
Derivada $f'(x)$	$f'(0) > 0$	$f'(\frac{5}{2}) < 0$	$f'(\frac{7}{2}) < 0$	$f'(10) > 0$

Tenemos un máximo en $(2, 0)$ y un mínimo en $(4, 4)$.

Calculamos la segunda derivada para estudiar la curvatura.

$$f'(x) = \frac{x^2 - 6x + 8}{(x-3)^2} \rightarrow f''(x) = \frac{(2x-6)(x-3)^2 - (x^2-6x+8)2(x-3)}{(x-3)^4}$$

$$f''(x) = \frac{(2x-6)(x-3) - 2(x^2-6x+8)}{(x-3)^3} \rightarrow f''(x) = \frac{2}{(x-3)^3}$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 2 = 0 \rightarrow \text{absurdo matemático} \rightarrow \text{no existen puntos de inflexión}$$

Podemos evaluar la segunda derivada a la izquierda y a la derecha de $x=3$, donde no está definida la función, para determinar la curvatura.

$$-\infty < x < 3 \rightarrow f''(0) < 0 \rightarrow f(x) \cap$$

$$3 < x < \infty \rightarrow f''(10) > 0 \rightarrow f(x) \cup$$

Ya tenemos información suficiente para representar la gráfica.

Gráfica de $f(x) = \frac{(x-2)^2}{x-3}$

