Problemas – Tema 1

Solución a problemas de Repaso de Matemáticas I - Hoja 14 - Problemas 3, 4, 5

Hoja 14. Problema 3

Resuelto por Marta Quesada Tofé (octubre 2014)

3. Calcular el siguiente límite $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt[3]{x}}$ **.**

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln(x)}{x^{\frac{1}{3}}} \to \frac{\infty}{\infty}$$

$$L'Hopital \to \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{3} x^{\frac{-2}{3}}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 \cdot 3}{x \cdot x^{\frac{-2}{3}}} = \lim_{x \to \infty} \frac{3}{x^{\frac{1}{3}}} = 0$$

Hoja 14. Problema 4

Resuelto por Ignacio Roldán (septiembre 2014)

4. Calcular el límite $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\tan x}$ **.**

Primero calculo el tipo de indeterminación que es, evaluando el límite.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\tan x}=\frac{1-\cos 0}{\tan 0}=\frac{0}{0}$$ → indeterminación

Estamos en condición de aplicar L'Hôpital al tener funciones continuas y derivables (al menos en un entorno alrededor de $x=0$), e indeterminación 0/0. Derivamos numerador y denominador por separado.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\frac{1}{cos^2 x}}=\lim_{x\to 0} \sin x \cdot cos^2 x=0$$

Hoja 14. Problema 5

Resuelto por Mónica Jiménez Almenara (septiembre 2014)

5. Calcular la base y la altura del triángulo isósceles de perímetro 8 y área máxima.

El triángulo isósceles tiene base x, y los otros dos lados de longitud y. Su perímetro es 8, según el enunciado. Por lo tanto:

$$8=2y+x \quad \rightarrow \quad y=\frac{8-x}{2}$$

Si el triángulo isósceles lo dividimos, por la mitad, en dos triángulos rectángulos semejantes, de catetos h (altura) y $\frac{x}{2}$ (mitad de la base), e hipotenusa y (uno de los dos lados iguales del triángulo), se cumple por Pitágoras:

$$h=\sqrt{y^2-\frac{x^2}{4}}$$

Sustituyendo el valor de y razonado anteriormente:

$$h=\frac{\sqrt{64-16x+x^2\ -x^2}}{4}$$

$$h=\sqrt{16-4x}$$

El área de un triángulo es $\rightarrow$ $A=\frac{base\,.\,altura}{2}=\frac{x\,.\,h}{2}$ $\rightarrow$ sustituyendo el valor de h :

$$A=\frac{x\sqrt{16-4\mathrm{x}}}{2}=\sqrt{4x^2-x^3} \quad \rightarrow \quad Dom(A)=[0,4]$$

Y esta es la función a maximizar, que solo depende de la variable x. Derivamos e igualamos a cero.

$$A'=\frac{8x-3x^2}{2\sqrt{4x^2-x^3}}=0 \rightarrow x=0,\ \ x=\frac{8}{3}$$

La solución con sentido físico es $\frac{8}{3}$, ya que no vamos a tener un triángulo de lados nulos. Debemos comprobar que es un máximo, viendo el crecimiento y decrecimiento a izquierda y derecha de este punto crítico (recordando el dominio de la función área $Dom(A)=[0,4]$).

$$0<x<\frac{8}{3} \ \rightarrow \ A'(1)>0 \Rightarrow A\uparrow$$

$$\frac{8}{3}<x<4 \ \rightarrow \ A'(3)<0 \Rightarrow A\downarrow$$

Confirmamos la existencia de máximo relativo en $x=\frac{8}{3}$, dando lugar a una altura $h=\sqrt{16-4(\frac{8}{3})}=\frac{4}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ y a un área máxima de $A_{max}=\frac{x\cdot h}{2}=\frac{32\sqrt{3}}{9}u^2$ -