

Problemas – Tema 1

Solución a problemas de Repaso de Matemáticas I - Hoja 11 - Problemas 1, 3

Hoja 11. Problema 1

Resuelto por José Antonio Álvarez Ocete (septiembre 2014)

1. Sea la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$.

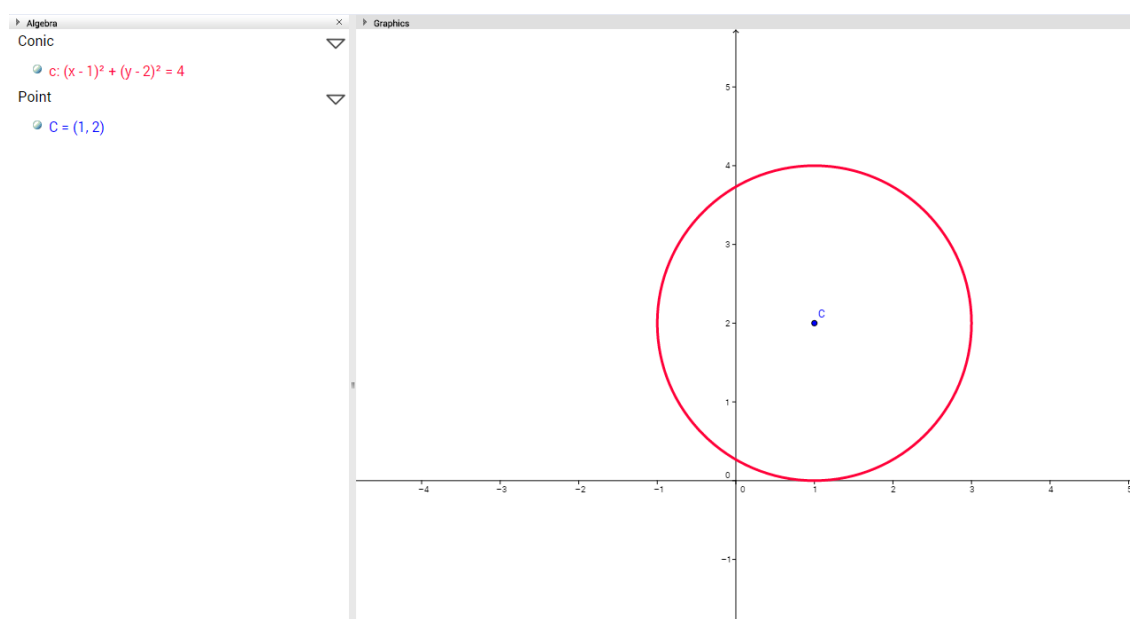
a) Hallar su centro, su radio y dibujarla.

b) Hallar el punto de la curva, de abscisa cero, más alejado del origen; hallar también la recta tangente a la curva en ese punto.

c) Hallar las ecuaciones de las tangentes trazadas desde el punto $(3,0)$ razonando la respuesta.

a) La ecuación de la circunferencia es semejante a $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$.

Por lo tanto, el centro es $C(1,2)$ y su radio $r=2$.



b) Resolvemos la ecuación de la circunferencia para $x=0$ y obtendremos dos valores de la imagen. Nos quedamos con el punto más separado del origen.

$$y^2 - 4y + 1 = 0$$

$$y = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$P(0, 2 + \sqrt{3}), Q(0, 2 - \sqrt{3})$$

Tomamos el punto $P(0, 2 + \sqrt{3})$. Para escribir la ecuación de la recta que pasa por este punto $P(0, 2 + \sqrt{3})$ y que sea tangente a la circunferencia podemos razonar de tres formas distintas.

Una primera opción sería trazar el vector $\vec{PC} = (u_x, u_y)$ que une el punto P con el centro C , y obtener la pendiente del vector como $m = \frac{u_y}{u_x}$. Dándonos cuenta que este vector \vec{PC} es perpendicular a la recta que pasa por P de manera tangente a la circunferencia (y sabemos que el producto de pendientes de rectas perpendiculares es igual a -1). Y con un punto y la pendiente podemos aplicar la ecuación punto-pendiente de la recta. En efecto:

$$P(0, 2 + \sqrt{3}), C(1, 2) \rightarrow \vec{PC} = (1, -\sqrt{3}) \rightarrow m = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3} \Rightarrow m_{\perp} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{recta: } \frac{y - (2 + \sqrt{3})}{x - 0} = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \text{recta: } y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 2 + \sqrt{3}$$

Una segunda forma de razonar sería la siguiente. Sabemos que la derivada de una función, evaluada en un punto, coincide con la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto.

Con la circunferencia no tenemos una función, ya que para un valor de x podemos tener hasta dos imágenes distintas. Pero sí podemos hacer uso de la derivación implícita, buscando el resultado $y'(x) = \frac{dy}{dx}$.

$$f(x, y): (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$$

$$\text{Derivamos } f(x, y) \text{ respecto a } x \rightarrow \frac{d}{dx}(x-1)^2 + \frac{d}{dx}(y-2)^2 = \frac{d}{dx}(4)$$

$$2(x-1) + 2(y-2) \frac{dy}{dx} = 0$$

Donde $\frac{dy}{dx}$ sería la derivada de y respecto a x . Y como no conocemos la forma explícita $y=y(x)$ debemos derivar de manera implícita y despejar el valor de $\frac{dy}{dx}$.

$$2(y-2) \frac{dy}{dx} = -2(x-1) \rightarrow y' : \frac{dy}{dx} = \frac{-(x-1)}{(y-2)}$$

Evaluamos esta expresión en el punto $P(0, 2+\sqrt{3})$ y tendremos la pendiente de la recta en ese punto.

$$y'(0, 2+\sqrt{3}) \equiv \text{pendiente recta tangente} \equiv \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Obteniendo así la misma recta solución del primer razonamiento.

$$\text{recta: } y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 2 + \sqrt{3}$$

Una tercera forma de plantear la solución sería obtener la forma explícita de $y(x)$ a partir de la ecuación de la circunferencia:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4 \rightarrow (y-2)^2 = 4 - (x-1)^2 \rightarrow y = \pm \sqrt{4 - (x-1)^2} + 2$$

Donde vamos a considerar el signo positivo de la raíz, ya que la semicircunferencia $y = +\sqrt{4 - (x-1)^2} + 2$ sí es una función y contiene al punto $P(0, 2+\sqrt{3})$ por donde queremos trazar la recta tangente.

De esta forma, podemos derivar la función explícita de la semicircunferencia:

$$y = +\sqrt{4 - (x-1)^2} + 2 \rightarrow y' = \frac{-(x-1)}{\sqrt{4 - (x-1)^2}}$$

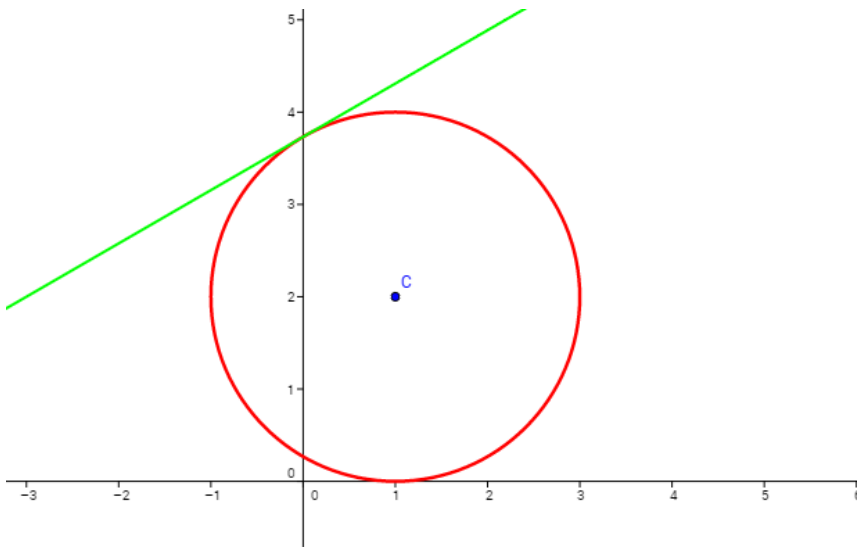
Si evaluamos la derivada en el valor de abscisa $x=0$ tendremos la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto.

$$\text{pendiente} \equiv y'(0) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Por lo que llegamos a la ecuación ya conocida de la recta solución.

$$\text{recta: } y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 2 + \sqrt{3}$$

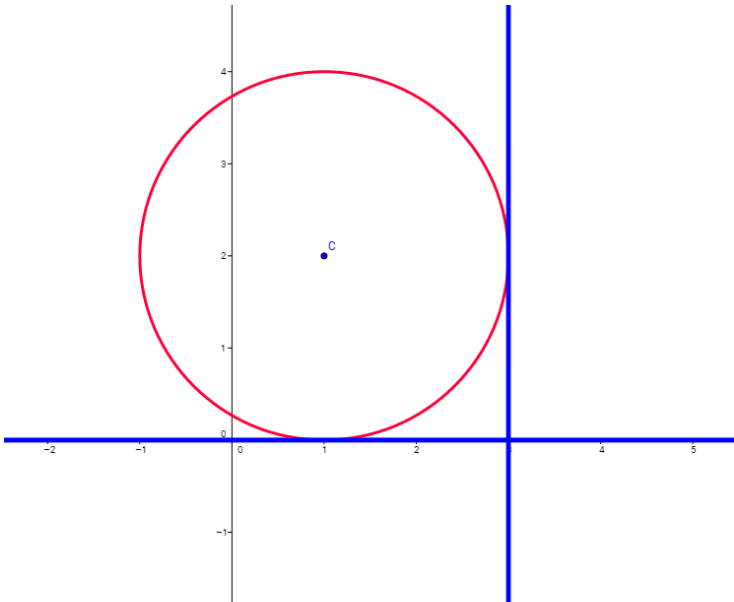
Gráfica de la circunferencia y de la recta tangente en el punto $(0, 2 + \sqrt{3})$



c) Si nos fijamos en la siguiente gráfica, el punto $(3,0)$ se encuentra en el eje de abscisas. Este eje resulta ser la tangente de la circunferencia en el punto $(1,0)$. Por tanto, ya tenemos la primera tangente de la circunferencia que pasa por P: la recta horizontal $y=0$.

Además $(3,0)$ tiene el mismo valor de x que el punto con mayor valor para x en toda la circunferencia: $(3,2)$. Por lo tanto la segunda tangente buscada es una recta paralela al eje de ordenadas y que pasa por $(3,0)$: la recta vertical $x=3$.

Circunferencia $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ y rectas tangentes que pasan por el punto $(3,0)$



Hoja 11. Problema 3

Resuelto por Gabriel Manzano (octubre 2013)

3. Dada la función $f(x) = \frac{x(2x+1)}{\sqrt{x+2}}$ escribe la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x=2$.

La recta que queremos calcular es tangente a la función en un punto $(2, f(2))$.

$$f(2) = \frac{2(2 \cdot 2 + 1)}{\sqrt{2+2}} = \frac{2 \cdot 5}{\sqrt{4}} = \frac{10}{2} = 5$$

La recta que es tangente a la función cumple la ecuación explícita $y = mx + n$, donde m es la pendiente de la recta. Sabemos que la pendiente de la recta tangente a la función coincide con el valor de la derivada evaluada en el punto $x=2$.

$$f(x) = \frac{x(2x+1)}{\sqrt{x+2}} \rightarrow f(x) = \frac{2x^2+x}{\sqrt{x+2}}$$
$$f'(x) = \frac{(4x+1)\sqrt{x+2} - (2x^2+x) \frac{1}{2\sqrt{x+2}}}{x+2}$$
$$f'(x=2) = \frac{31}{8}$$

Sabiendo la pendiente y un punto por donde pasa la recta, podemos calcular su ecuación punto-pendiente $y - y_0 = m(x - x_0)$.

$$y - 5 = \frac{31}{8}(x - 2) \rightarrow y = \frac{31x}{8} - \frac{31}{4} + 5 \rightarrow y = \frac{31x}{8} - \frac{11}{4}$$

En la gráfica observamos la curva y la recta tangente en el punto $(2, 5)$.

