Problemas – Tema 1

Solución a problemas de Repaso de Matemáticas I - Hoja 11 - Problemas 1, 3

Hoja 11. Problema 1

Resuelto por José Antonio Álvarez Ocete (septiembre 2014)

1. Sea la circunferencia de ecuación $x^2+y^2-2x-4y+1=0$ **.**

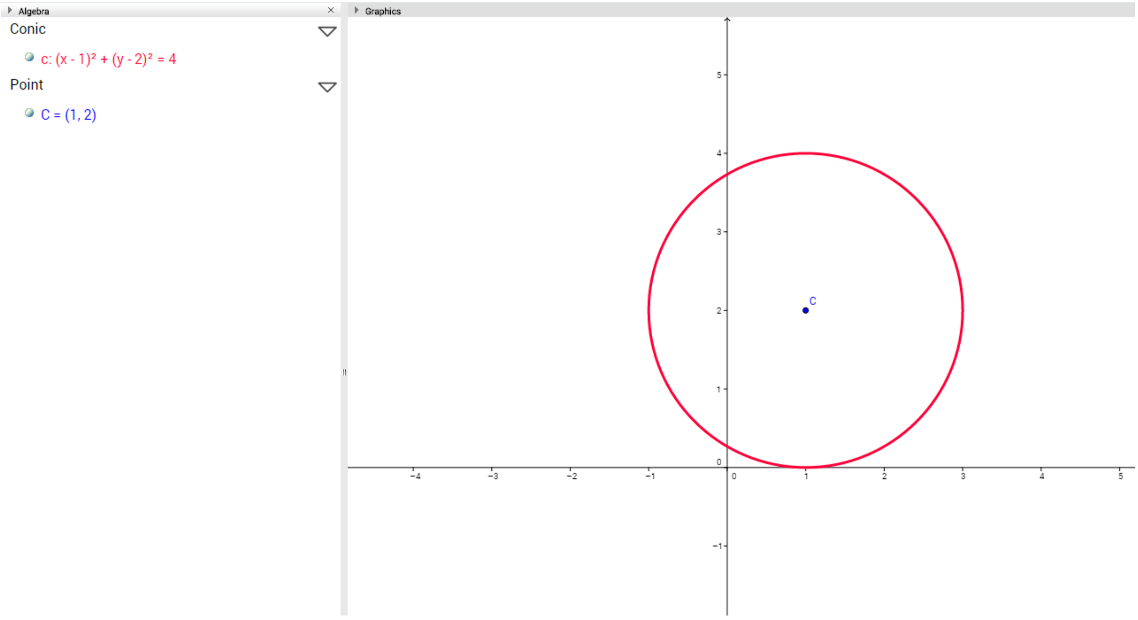
a) Hallar su centro, su radio y dibujarla.

b) Hallar el punto de la curva, de abscisa cero, más alejado del origen; hallar también la recta tangente a la curva en ese punto.

c) Hallar las ecuaciones de las tangentes trazadas desde el punto $(3,0)$ **razonando la respuesta.**

a) La ecuación de la circunferencia es semejante a $(x-1)^2+(y-2)^2=4$.

Por lo tanto, el centro es $C(1,2)$ y su radio $r=2$.



b) Resolvemos la ecuación de la circunferencia para $x=0$ y obtendremos dos valores de la imagen. Nos quedamos con el punto más separado del origen.

$$y^2-4y+1=0$$
$$y=2\pm\sqrt{3}$$
$$P(0,\ 2+\sqrt{3}),\ Q(0,\ 2-\sqrt{3})$$

Tomamos el punto $P(0,2+\sqrt{3})$. Para escribir la ecuación de la recta que pasa por este punto $P(0,2+\sqrt{3})$ y que sea tangente a la circunferencia podemos razonar de tres formas distintas.

Un primera opción sería trazar el vector $\vec{PC}=(u_x,u_y)$ que une el punto P con el centro C , y obtener la pendiente del vector como $m=\frac{u_y}{u_x}$. Dándonos cuenta que este vector $\vec{PC}$ es perpendicular a la recta que pasa por P de manera tangente a la circunferencia (y sabemos que el producto de pendientes de rectas perpendiculares es igual a -1). Y con un punto y la pendiente podemos aplicar la ecuación punto-pendiente de la recta. En efecto:

$$P(0,2+\sqrt{3})\ ,\ C(1,2)\ \rightarrow\ \vec{PC}=(1,-\sqrt{3})\ \rightarrow\ m=\frac{-\sqrt{3}}{1}=-\sqrt{3}\Rightarrow m_{\perp}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$recta:\frac{y-(2+\sqrt{3})}{x-0}=\frac{\sqrt{3}}{3}\ \rightarrow\ recta: y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+2+\sqrt{3}$$

Una segunda forma de razonar sería la siguiente. Sabemos que la derivada de una función, evaluada en un punto, coincide con la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto.

Con la circunferencia no tenemos una función, ya que para un valor de x podemos tener hasta dos imágenes distintas. Pero sí podemos hacer uso de la derivación implícita, buscando el resultado $y'(x)=\frac{dy}{dx}$.

$$f(x,y):(x-1)^2+(y-2)^2=4$$

Derivamos $f(x,y)$ respecto a x $\rightarrow$ $\frac{d}{dx}(x-1)^2+\frac{d}{dx}(y-2)^2=\frac{d}{dx}(4)$

$$2(x-1)+2(y-2)\frac{dy}{dx}=0$$

Donde $\frac{dy}{dx}$ sería la derivada de y respecto a x . Y como no conocemos la forma explícita $y=y(x)$ debemos derivar de manera implícita y despejar el valor de $\frac{dy}{dx}$.

$$2(y-2)\frac{dy}{dx}=-2(x-1) \quad \rightarrow \quad y':\frac{dy}{dx}=\frac{-(x-1)}{(y-2)}$$

Evaluamos esta expresión en el punto $P(0,2+\sqrt{3})$ y tendremos la pendiente de la recta en ese punto.

$$y'(0,2+\sqrt{3})\equiv pendiente \quad recta \quad tangente\equiv\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Obteniendo así la misma recta solución del primer razonamiento.

$$recta: y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+2+\sqrt{3}$$

Una tercera forma de plantear la solución sería obtener la forma explicita de $y(x)$ a partir de la ecuación de la circunferencia:

$$(x-1)^2+(y-2)^2=4 \quad \rightarrow \quad (y-2)^2=4-(x-1)^2 \quad \rightarrow \quad y=\pm\sqrt{4-(x-1)^2}+2$$

Donde vamos a considerar el signo positivo de la raíz, ya que la semicircunferencia $y=+\sqrt{4-(x-1)^2}+2$ sí es una función y contiene al punto $P(0,2+\sqrt{3})$ por donde queremos trazar la recta tangente.

De esta forma, podemos derivar la función explícita de la semicircunferencia:

$$y=+\sqrt{4-(x-1)^2}+2 \quad \rightarrow \quad y'=\frac{-(x-1)}{\sqrt{4-(x-1)^2}}$$

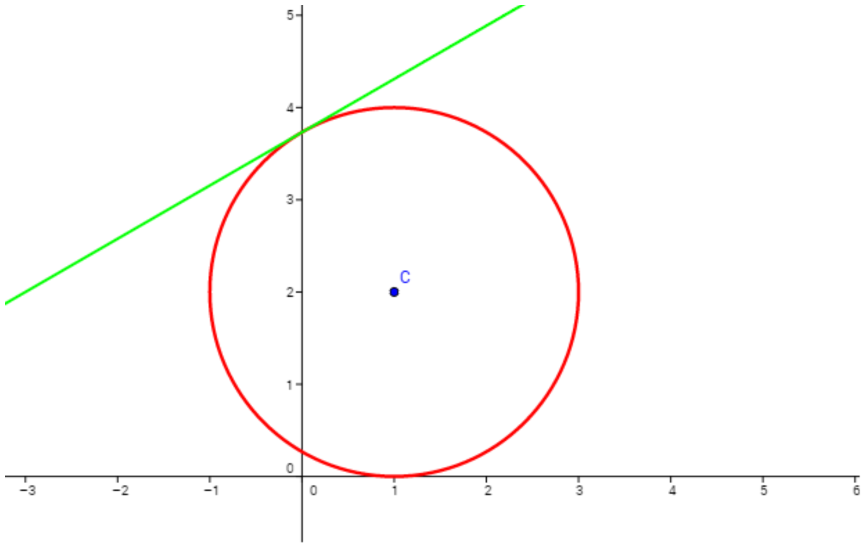
Si evaluamos la derivada en el valor de abscisa $x=0$ tendremos la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto.

$$pendiente \equiv y'(0)=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Por lo que llegamos a la ecuación ya conocida de la recta solución.

$$recta: y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+2+\sqrt{3}$$

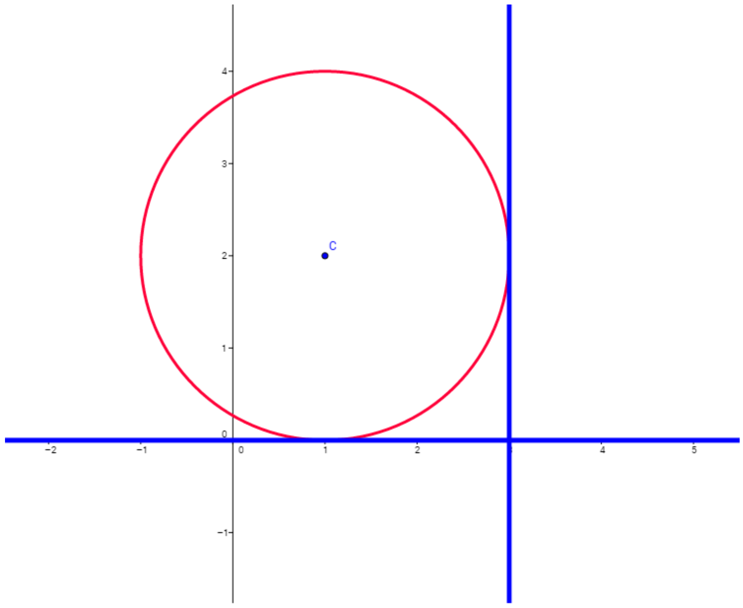
Gráfica de la circunferencia y de la recta tangente en el punto $(0,2+\sqrt{3})$



c) Si nos fijamos en la siguiente gráfica, el punto $(3,0)$ se encuentra en el eje de abscisas. Este eje resulta ser la tangente de la circunferencia en el punto $(1,0)$. Por tanto, ya tenemos la primera tangente de la circunferencia que pasa por P: la recta horizontal $y=0$.

Además $(3,0)$ tiene el mismo valor de x que el punto con mayor valor para x en toda la circunferencia: $(3,2)$. Por lo tanto la segunda tangente buscada es una recta paralela al eje de ordenadas y que pasa por $(3,0)$: la recta vertical $x=3$.

Circunferencia $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ *y rectas tangentes que pasan por el punto* $(3,0)$


C

Hoja 11. Problema 3

Resuelto por Gabriel Manzano (octubre 2013)

3. Dada la función $f(x)=\frac{x(2x+1)}{\sqrt{x+2}}$ **escribe la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa** $x=2$ **.**

La recta que queremos calcular es tangente a la función en un punto $(2, f(2))$.

$$f(2)=\frac{2(2\cdot 2+1)}{\sqrt{2+2}}=\frac{2\cdot 5}{\sqrt{4}}=\frac{10}{2}=5$$

La recta que es tangente a la función cumple la ecuación explícita $y=mx+n$, donde m es la pendiente de la recta. Sabemos que la pendiente de la recta tangente a la función coincide con el valor de la derivada evaluada en el punto $x=2$.

$$f(x)=\frac{x(2x+1)}{\sqrt{x+2}} \rightarrow f(x)=\frac{2x^2+x}{\sqrt{x+2}}$$

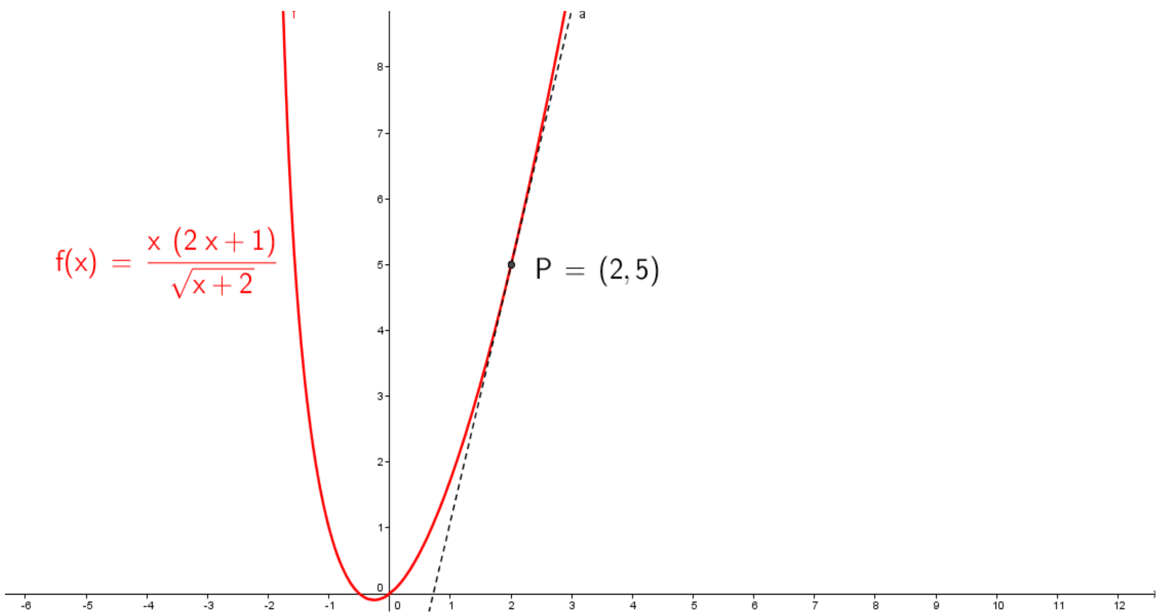
$$f'(x)=\frac{(4x+1)\sqrt{x+2}-(2x^2+x)\frac{1}{2\sqrt{x+2}}}{x+2}$$

$$f'(x=2)=\frac{31}{8}$$

Sabiendo la pendiente y un punto por donde pasa la recta, podemos calcular su ecuación punto-pendiente $y-y_0=m(x-x_0)$.

$$y-5=\frac{31}{8}(x-2) \rightarrow y=\frac{31x}{8}-\frac{31}{4}+5 \rightarrow y=\frac{31x}{8}-\frac{11}{4}$$

En la gráfica observamos la curva y la recta tangente en el punto $(2,5)$.


f
a
$f(x) = \frac{x\,(2x+1)}{\sqrt{x+2}}$
$P = (2, 5)$