Problemas – Tema 1

Solución a problemas de Repaso de Matemáticas I - Hoja 10 - Problemas 1, 2, 3

Hoja 10. Problema 1

Resuelto por María Olivares Guerrero (septiembre 2014)

1. Sea la función definida por $f(x)=\frac{3x^4+1}{x^3}$ **para** $x\neq 0$ **.**

a) Estudia las asíntotas de la gráfica de la función.
b) Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, y los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Estamos ante un cociente de polinomios, por lo tanto es continua en toda la recta real excepto donde se anule el denominador. Es decir, para $x=0$ la función no está definida y no es continua en ese punto. Vamos a comprobar si hay una asíntota vertical.

$$\lim_{x-0-}\frac{3x^4+1}{x^3}=\frac{1}{0-}=-\infty \quad , \quad \lim_{x-0+}\frac{3x^4+1}{x^3}=\frac{1}{0+}=+\infty$$ → Hay una asíntota vertical en $x=0$.

Como el numerador tiene un grado mayor que el denominador, $f(x)$ tiene una asíntota oblicua del tipo $y=mx+n$ (y por lo tanto, no tendrá asíntota horizontal).

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=m(m\ finito\ y\neq 0) \quad\to\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^4+1}{x^3}}{x}=\frac{3x^4+1}{x^4}=3 \quad\to\quad m=3$$

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)=n \quad\to\quad \lim_{x\to\infty}\frac{3x^4+1}{x^3}-3\mathrm{x}=\frac{3x^4+1-3x^4}{x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}=0 \quad\to\quad n=0$$

Por lo tanto hay una asíntota oblicua en $y=3x$.

b) Nos están pidiendo que hagamos la primera derivada para saber los máximos y los mínimos relativos, además del crecimiento y decrecimiento. Calcularemos los valores críticos igualando la primera derivada a cero.

$$f'(x)=\frac{3x^2(x^4-1)}{x^6}=0$$
$$3x^2(x^4-1)=0$$
$$x^4-1=0$$
$$x=\pm 1$$

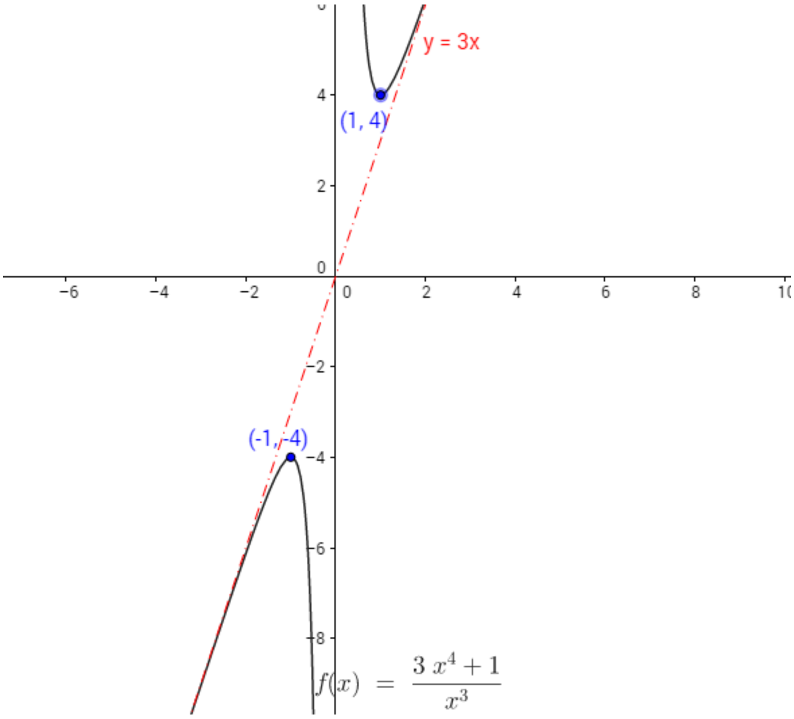
Para estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función vamos a tener en cuenta los valores críticos y los puntos donde esta no está definida $(x=0)$.

Daremos valores que estén entre los intervalos para sustituirlos en la primera derivada y saber el crecimiento o decrecimiento de la función (derivada positiva implica función creciente, derivada negativa implica función decreciente).

Función $f(x)$	$f(x)\uparrow$	$f(x)\downarrow$	$f(x)\downarrow$	$f(x)\uparrow$
Intervalos	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
Derivada $f'(x)$	$f'(-10)>0$	$f'(\frac{-1}{2})<0$	$f'(\frac{1}{2})<0$	$f'(10)>0$

Así comprobamos que en $x=-1$ tenemos un máximo $(-1,-4)$, y en $x=1$ un mínimo $(1,4)$, como apreciamos en la gráfica.

Gráfica de $f(x)=\dfrac{3x^4+1}{x^3}$



Hoja 10. Problema 2

Resuelto por Carmen Martín Rubio (septiembre 2014)

2. Calcular los siguientes límites.

a) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}$

b) $\lim_{x\to\infty} x\left[arctg\left(e^x\right)-\frac{\pi}{2}\right]$

a) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}=\infty-\infty$ → Indeterminación

Multiplicamos y dividimos por el conjugado.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}\right)}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}\right)=\frac{\infty}{\infty}$$

Dividimos numerador y denominador por la máxima potencia existente en los polinomios: en nuestro caso x (recordando que dentro de la raíz entra como x^2).

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{2x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}\right)=\frac{2}{2}=1$$

b) $\lim_{x\to\infty} x\left[arctg\left(e^x\right)-\frac{\pi}{2}\right]=\infty\cdot 0$ → Indeterminación

Lo expresamos de la siguiente forma:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left[arctg\left(e^x\right)-\frac{\pi}{2}\right]}{\frac{1}{x}}=\frac{0}{0}$$

Tenemos un cociente de funciones funciones continuas y derivables (salvo en $x=0$ para el denominador), que tienden a cero cada una de ellas al ser evaluadas en el infinito. Por lo tanto, podemos aplicar L'Hôpital.

Derivamos por separado numerador y denominador, y calculamos el nuevo límite.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left[\frac{e^x}{1+e^{2x}}-0\right]}{\frac{-1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left[-x^2e^x\right]}{1+e^{2x}}=\frac{\infty}{\infty}$$ → Indeterminación

Nuevamente aplicamos L'Hôpital, derivando numerador y denominador por separado.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left[-2xe^x-x^2e^x\right]}{2e^{2x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left[\left(-2x-x^2\right)e^x\right]}{2e^x\cdot e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x-x^2}{2e^x}=\frac{\infty}{\infty}$$

Podemos seguir aplicando L'Hôpital sucesivamente hasta quitar la indeterminación, o bien darnos cuenta que la función exponencial en el infinito es mucho "más potente" que un polinomio (por lo que podemos intuir que el límite tenderá a 0 al estar la exponencial en el denominador).

Si deseamos aplicar L'Hôpital dos veces más, de manera consecutiva:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-2-2x}{2e^x}=\frac{\infty}{\infty}$$ → Indeterminación

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-2}{2e^x}=\frac{-1}{\infty}=0$$

Hoja 10. Problema 3

Resuelto por Vicky Torrecillas (septiembre 2014)

3. Calcular los siguientes límites.

a) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(\cos 3x)}{\ln(\cos 2x)}\right)$

b) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{4x}\right)$

a) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(cos3x)}{\ln(cos2x)}\right)=\frac{0}{0}$ → Indeterminación

Aplicaremos L'Hopital sucesivamente, siempre que se mantenga la indeterminación y las funciones que aparezcan en numerador y denominador sean continuas, al menos, en $x=0$ y derivables en un entorno alrededor del valor $x=0$.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(cos3x)}{\ln(cos2x)}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{-3\text{sen}3x}{cos3x}}{\frac{-2\text{sen}2x}{cos2x}}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{3\text{sen}(3x)\cos(2x)}{2\text{sen}(2x)\cos(3x)}\right)=\frac{0}{0}$$ → Indeterminación

$$\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{3\cos(3x)\cos(2x)+sen(3x)(-2)sen(2x)}{2\cos(2x)\cos(3x)+sen(2x)(-3)sen(3x)}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{9}{4}$$

b) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{4x}\right)=\frac{0}{0}$ → Indeterminación

Aplicamos L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{4x}\right)=\frac{\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\sqrt{4+x}}+\frac{1}{2\sqrt{4-x}}}{4}=\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}{4}=\frac{1}{8}$$