Problemas – Tema 1

Solución a problemas de Repaso de 1ºBachillerato - Hoja 01 - Todos resueltos

Hoja 1. Problema 1

1. Dados tres números reales cualesquiera r_1, r_2 y r_3 **hallar el número real** x **que minimiza la función** $D(x)=(r_1-x)^2+(r_2-x)^2+(r_3-x)^2$ **.**

Minimizar significa buscar candidatos a extremos relativos de la función dada y comprobar que son mínimos absolutos. Si nos pidieran maximizar, buscaríamos máximos absolutos.

Recuerda que los extremos relativos presentan pendiente nula (primera derivada igual a cero). Estos problemas se conocen, de forma general, como problemas de optimización.

$$D(x)=(r_1-x)^2+(r_2-x)^2+(r_3-x)^2$$

Derivamos e igualamos a cero para obtener los candidatos a extremos relativos.

$$D'(x)=-2(r_1-x)-2(r_2-x)-2(r_3-x)=6x-2(r_1+r_2+r_3)$$

$$D'(x)=0 \quad \rightarrow \quad 6x-2(r_1+r_2+r_3)=0 \quad \rightarrow \quad x=\frac{r_1+r_2+r_3}{3}$$

¿Es un mínimo? Podemos plantearlo de dos maneras.

La primera es dar valores a la primera derivada, a ambos lados del candidato a extremo y comprobar que, si es un mínimo, a su izquierda la función decrece (pendiente negativa) y a su derecha la función crece (pendiente positiva).

Otra opción es obtener la segunda derivada y evaluarla en el punto candidato a extremo. Y si el valor es positivo, estaremos ante un mínimo. Optamos por este segundo método.

$D''(x)=6>0 \quad \rightarrow \quad x=\frac{r_1+r_2+r_3}{3}$ es un mínimo absoluto de $D(x)$

Hoja 1. Problema 2

2. Sabiendo que $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{a}{\ln x}\right)$ es finito, calcula a y el valor del límite (ln denota el logaritmo neperiano).

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{a}{\ln x}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x\cdot lnx-a(x-1)}{(x-1)lnx}\right)=\frac{0}{0}$$ → Indeterminación $\frac{0}{0}$

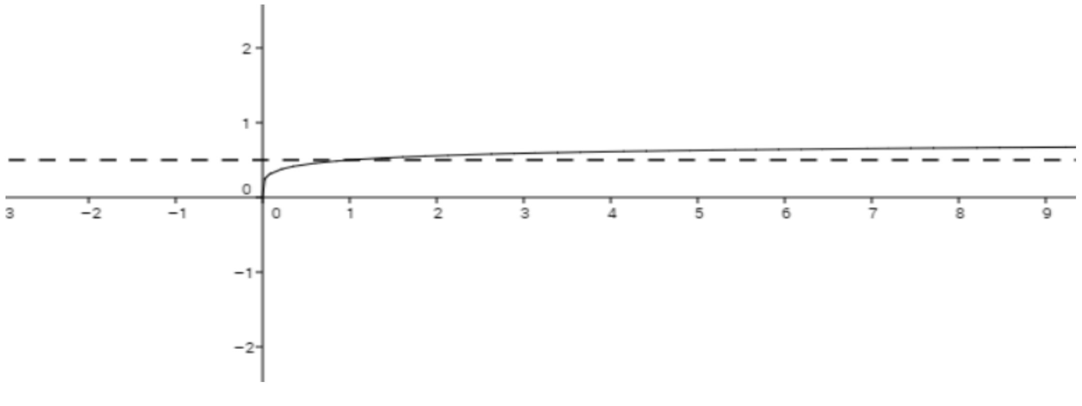
Aplicamos la regla de L'Hôpital → $\lim_{x\to 1}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{f'(x)}{g'(x)}\right)$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x\cdot lnx-a(x-1)}{(x-1)lnx}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{lnx+1-a}{lnx+\frac{x-1}{x}}\right)=\frac{1-a}{0}$$

Las condiciones del enunciado marcan que el límite sea finito, por lo que al tener un cociente con denominador igual a 0, necesitamos que el numerador también sea nulo para que el límite no se dispare a infinito → $a=1$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{lnx}{lnx+\frac{x-1}{x}}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2}{x(x+1)}\right)=\frac{1}{2}$$

Gráfica de $f(x)=\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}$ *y de la recta horizontal* $y=\frac{1}{2}$



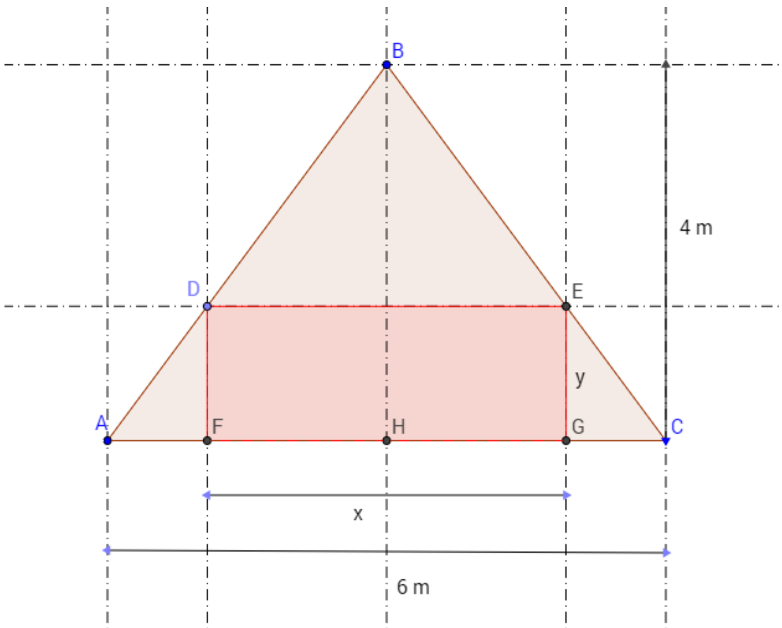
Hoja 1. Problema 3

3. Halla las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en un triángulo isósceles de 6 metros de base (el lado desigual) y 4 metros de alto.

Las incógnitas del problema son:

$$base \quad del \quad rectángulo = x$$
$$altura \quad del \quad rectángulo = y$$

Realicemos un dibujo que ilustre el problema.



La función a maximizar es el área del rectángulo inscrito en el triángulo (sombreado de color rojo).

$$Área = x \cdot y$$

Para poder derivar y optimizar debemos expresar la función dependiendo de solo una variable. La relación entre ambas variables podemos obtenerla del enunciado, con ayuda del dibujo auxiliar.

El triángulo rectángulo ABH es proporcional al triángulo de vértices ADF. Por lo tanto el ángulo del vértice A es idéntico en ambos triángulos. Y sus tangentes también (el cociente entre el cateto opuesto y el cateto contiguo al vértice A). Es decir:

$$Triángulo\ ABH \rightarrow tg(\hat{A})=\frac{4}{3}$$

$$Triángulo\ ADF \rightarrow tg(\hat{A})=\frac{y}{3-\frac{x}{2}}$$

Igualamos.

$$\frac{4}{3}=\frac{y}{3-\frac{x}{2}} \quad \rightarrow \quad x=6-\frac{3}{2}y$$

Sustituyendo el valor de x en la función $Área$ dejamos todo expresado en función de la variable y .

$$A=(6-\frac{3}{2}y)y=6\text{y}-\frac{3}{2}y^2$$

Derivamos e igualamos a cero.

$$A'=6-3\text{y} \quad , \quad A'=0 \quad \rightarrow \quad y=2$$

Para demostrar si es un máximo, calculamos la derivada segunda.

$A''=-3<0 \quad \rightarrow \quad y=2$ es un máximo de la función

Los valores que maximizan el área son: $x=base=3 \quad m$, $y=altura=2 \quad m$.

Hoja 1. Problema 4

4. Sea la función definida por $f(x)=x e^{\frac{1}{x}}$ **para** $x \geqslant -1, x \neq 0$ **:**

a) Calcula los límites laterales de la función en $x=0$ **.**

b) Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de $f(x)$ **.**

a) $\lim_{x \to 0-} (x \cdot e^{\frac{1}{x}})=0 \cdot 0=0$

$\lim_{x \to 0+} (x \cdot e^{\frac{1}{x}})=0 \cdot \infty \quad \to \quad \lim_{x \to 0+} (\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}})=\frac{\infty}{\infty}$ → Indeterminación → L'Hôpital.

$$\lim_{x \to 0+} (\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}})=\lim_{x \to 0+} (\frac{(\frac{-1}{x^2}) e^{\frac{1}{x}}}{\frac{-1}{x^2}})=\lim_{x \to 0+} e^{\frac{1}{x}}=+\infty$$

b) La función no es continua en $x=0$ al no coincidir sus límites laterales. Además, el límite lateral por la derecha diverge a $+\infty$. Por lo tanto $x=0$ es una asíntota vertical para valores a la derecha ($x>0$).

Para la asíntota horizontal comprobamos si converge a un valor finito alguno de los siguientes límites en el infinito:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x)=y_0$$

Pero ambos límites divergen a infinito. Por lo tanto, no existen asíntotas horizontales.

En las asíntotas oblicuas $y=mx+n$ debe cumplirse:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}=m \neq 0 \quad \to \quad \lim_{x \to \pm\infty} (\frac{xe^{\frac{1}{x}}}{x})=\lim_{x \to \pm\infty} (e^{\frac{1}{x}})=1$$

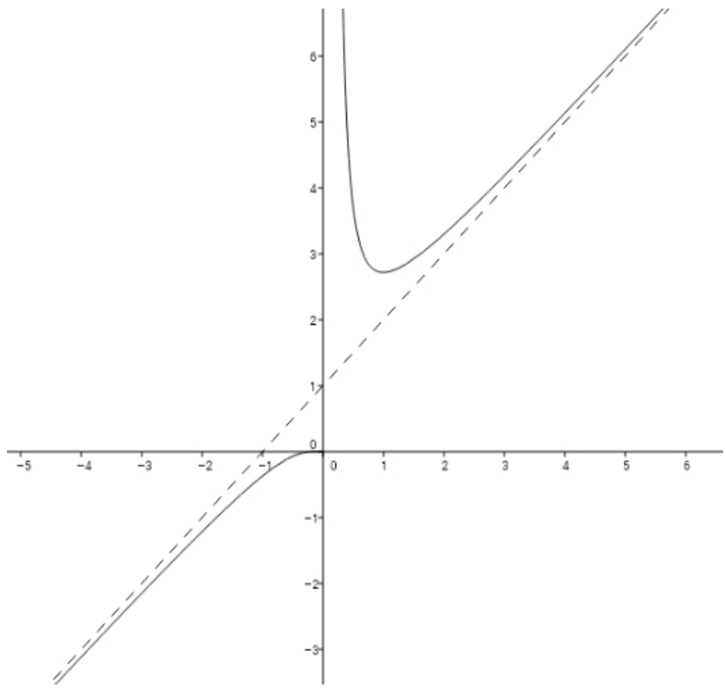
$$\lim_{x \to \pm\infty} (f(x)-mx)=n \quad \to \quad \lim_{x \to \pm\infty} (xe^{\frac{1}{x}}-x)=\lim_{x \to \pm\infty} (x(e^{\frac{1}{x}}-1))=\lim_{x \to \pm\infty} (\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}})=\frac{0}{0}$$

Aplicamos L'Hôpital en la indeterminación $\frac{0}{0}$ y calculamos el límite de la derivada del numerador y el denominador.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{-1}{x^2}\cdot e^{\frac{1}{x}}}{\frac{-1}{x^2}}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(e^{\frac{1}{x}}\right)=1$$

Existe asíntota oblícua $y=x+1$, que representamos gráficamente junto a la función $f(x)=x e^{\frac{1}{x}}$.

Función $f(x)=x e^{\frac{1}{x}}$ *y asíntota oblicua* $y=x+1$



Hoja 1. Problema 5

5. Sea $f(x)=\left\{\begin{matrix} \frac{sen(x)}{x}+2 & si \quad x\neq 0 \\ k & si \quad x=0 \end{matrix}\right\}$

a) ¿Hay algún valor de k para el cual f(x) sea continua en $x=0$ **?**

b) ¿Hay algún valor de k para el cual f(x) sea derivable en $x=0$ **?**

c) Determinar sus asíntotas.

a) Para que una función sea continua en $x=x_0$ deben satisfacerse tres condiciones:

- Estar definida la función en el punto → $\exists f(x_0)$
- Existir los límites laterales, ser finitos y ser iguales → $\lim_{x\to x_{0-}} f(x)=\lim_{x\to x_{0+}} f(x)=L$
- Coincidir el límite con el valor de la función en el punto → $f(x_0)=L$

Aplicamos estas condiciones a nuestra función, con $x_0=0$.

$$f(0)=k$$

$$\lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0-}\left(\frac{sen(x)}{x}+2\right)=\lim_{x\to 0-}\left(\frac{sen(x)+2x}{x}\right)=\frac{0}{0}$$ → Indeterminación

Aplicamos L'Hôpital en la indeterminación y derivamos numerador y denominador.

$$\lim_{x\to 0-}\left(\frac{sen(x)+2\mathrm{x}}{x}\right)=\lim_{x\to 0-}\left(\frac{\cos(x)+2}{1}\right)=3$$

Para el límite lateral derecho obtenemos idéntico resultado. Por lo tanto, para que la función sea continua en $x=0$, debe cumplirse $k=3$.

b) Una función es derivable en $x=x_0$ si cumple:

- La función es continua en $x=x_0$ (las condiciones de continuidad las hemos indicado en el apartado anterior del problema).
- Las derivadas laterales coinciden → $\lim_{h\to 0-}(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h})=\lim_{h\to 0+}(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h})$

Para que sea continua ya hemos demostrado que $k=3$. Calculemos las derivadas laterales.

$$\lim_{h\to 0-}(\frac{f(0+h)-f(0)}{h})=\lim_{h\to 0-}(\frac{\frac{sen(h)}{h}+2-3}{h}) \rightarrow \lim_{h\to 0-}(\frac{sen(h)-h^2}{h})=\frac{0}{0}$$ → Indeterminación

Aplicamos L'Hôpital en la indeterminación.

$$\lim_{h\to 0}(\frac{\cos(h)-1}{2h})=\frac{0}{0}$$ → Indeterminación

Volvemos a derivar, aplicando L'Hôpital.

$$\lim_{h\to 0}(\frac{-sen(h)}{2})=0$$

Para la derivada lateral derecha obtenemos idéntico resultado. Por lo tanto, la función es derivable en $x=0$ si $k=3$.

c) No existen asíntotas verticales, ya que si $k=3$ la función es continua en $x=0$. En caso contrario, tendríamos una discontinuidad evitable.

Para las asíntotas horizontales evaluamos el límite de la función cuando x tiende a infinito.

$$\lim_{x\to\pm\infty}(\frac{sen(x)}{x}+2)=2 \rightarrow y=2$$ es una asíntota horizontal.

Al existir una asíntota horizontal, no existen asíntotas oblícuas.

Representamos la función $f(x)=\frac{sen(x)}{x}+2$ y la asíntota $y=2$.

Función $f(x)=\frac{sen(x)}{x}+2$ *y asíntota horizontal* $y=2$