Preparando examen Selectividad Mates CCSS

Probabilidad total y Teorema de Bayes

Índice de contenido

Teorema de Probabilidad Total

El Teorema de Probabilidad Total ya lo hemos utilizado... sin saberlo.

¿Recuerdas el problema de los tres sastres del pdf anterior, sobre probabilidad condicionada? ¿Cuándo calculamos la probabilidad de que un cliente no estuviera satisfecho con el arreglo del traje?

Si recuerdas, había tres sastres: A, B y C. Por lo que la probabilidad de no quedar satisfecho se calculaba sumando la probabilidad de no quedar satisfecho con cada uno de los sastres.

El suceso "ser atendido por A" es incompatible con los sucesos "ser atendido por B" o "ser atendido por C". Son tres sucesos incompatibles entre sí, ya que no tienen elementos en común: un cliente atendido por el sastre A, solo es atendido por A; no es atendido por B ni por C.

Por lo tanto, siempre, siempre, **siempre que tengamos sucesos** $A_1, A_2, \ldots, A_n$ **incompatibles entre sí dos a dos, todos ellos con probabilidad no nula, y además la unión de todos los sucesos de lugar a todo el espacio muestral** $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = E$ **, podemos calcular la probabilidad de que ocurra un suceso** B **a partir de las probabilidades condicionadas:**

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + \ldots + P(A_n) \cdot P(B/A_n)$$

Este es el Teorema de la Probabilidad Total. En los ejercicios podemos usarlo, demostrando previamente que se cumplen las condiciones previas que indica el teorema. O bien podemos razonar, como hicimos en el pdf anterior, a partir de las probabilidades condicionadas. De ambas formas es correcto.

Una cuestión final de **nomenclatura**: si todos los sucesos son incompatibles dos a dos y la unión de todos los sucesos genera el espacio muestral, se dice que los sucesos forman un **sistema completo de sucesos incompatibles dos a dos**.

Ejemplo: La probabilidad de que un cilicista gane una carrera en un día lluvioso es 0,08 y la de que gane en un día seco es 0,3. Si la probabilidad de que el día de la carrera sea lluvioso es 0,25, ¿cuál será la probabilidad de que el ciclista gane?

Forma 1 de resolverlo: con Teorema de Probabilidad Total

Para ganar puede darse dos circunstancias: que llueva y gane, o bien que sea sea seco y gane. "Llover" y "seco" son dos sucesos independientes, ya que llover es lo opuesto a estar seco. Si llueve no está seco. Y si está seco, no llueve.

Además, la unión de los días lluviosos y secos forman todo el espacio muestral de los días en que se celebra la carrera: P(lluvia) = 0,25 mientras que P(seco) = 1 – 0,25 = 0,75. Ambas probabilidades son no nulas.

Con esto hemos demostrado que se cumplen todas las condiciones del Teorema de

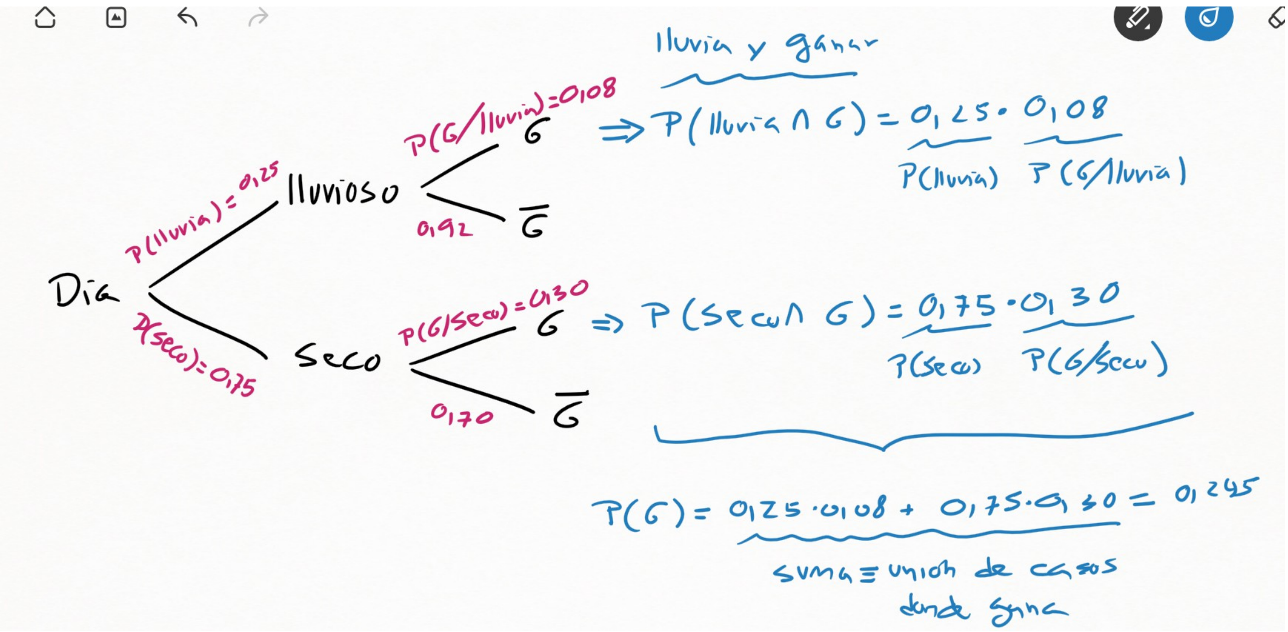
Probabilidad Total, por lo que podemos utilizar las probabilidades condicionadas del enunciado para obtener la probabilidad total de ganar:

$$P(ganar)=P(lluvia)\cdot P(G/lluvia)+P(seco)\cdot P(G/seco)$$

$$P(ganar)=0{,}25\cdot 0{,}08+0{,}75\cdot 0{,}3=0{,}245$$

Forma 2 de resolverlo: con probabilidad condicionada y diagrama de árbol

Como el enunciado da las probabilidades condicionadas es muy práctico usar un diagrama de árbol (si el enunciado diese la probabilidad de las intersecciones, sería más cómodo hacer tabla de contingencia. No olvides que siempre puedes pasar de árbol a tabla y de tabla a árbol usando la relación de sucesos dependientes $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B/A)$).



Teorema de Bayes

Supongamos que sabemos la probabilidad de que un enfermo de hepatitis (H) esté amarillo (A). Es decir, conocemos la probabilidad condicionada P(A/H) que significa lo siguiente: si sabemos seguro que el enfermo tiene hepatitis, qué probabilidad hay de que se ponga amarillo.

Hasta aquí, nada nuevo bajo el sol. Llevamos ya varios ejercicios resueltos con el concepto de probabilidad condicionada.

Pero, sabiendo P(A/H) ¿podemos saber cuánto vale P(H/A)? Es decir, si sabemos seguro que el paciente está amarillo, ¿cuál es la probabilidad de que padezca hepatitis?

Son dos cosas distintas. Aquí está la clave. Debemos comprender esta diferencia.

En P(A/H) el enfermo seguro tiene hepatitis. Y queremos saber con qué probabilidad se pondrá amarillo.

En P(H/A) el enfermo seguro está amarillo. Y queremos saber con qué probabilidad tendrá hepatitis.

La relación entre ambas probabilidades condicionadas nos lo da el **Teorema de Bayes**:

Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ **un sistema completo de sucesos incompatibles dos a dos, con probabilidades no nulas. Sea B otro suceso del que conocemos las probabilidades condicionadas** $P(B/A_1), P(B/A_2), \ldots, P(B/A_n)$ **. Se cumple:**

$$P(A_i/B)=\frac{P(A_i)\cdot P(B/A_i)}{P(B)}=\frac{P(A_i)\cdot P(B/A_i)}{P(A_1)\cdot P(B/A_1)+P(A_2)\cdot P(B/A_2)+\ldots+P(A_n)\cdot P(B/A_n)}$$

Donde en el denominador P(B) hemos aplicado el Teorema de Probabilidad Total.

En el fondo, no necesitamos el Teorema de Bayes para resolver ejercicios, ya que con un diagrama de árbol y teniendo claro el concepto de probabilidad condicionada, podemos resolverlos de igual forma. Lo único es que, con el Teorema de Bayes, se ahorra tiempo.

Ejemplo: Una librería tiene tres estatenrías: superior, central e inferior.

En la estantería superior hay 3 novelas y 7 cuentos.

En la estantería central hay 8 novelas y 6 cuentos.

En la estentería inferior hay 5 novelas y 9 cuentos.

Se escoge un estante al azar y se saca de él un libro. Si resulta que es una novela, ¿cuál es la probabilidad de que se haya sacado del estante central?

Forma 1: con el Teorema de Bayes

Los sucesos estantería Superior (S), Central (C) e Inferior (I) son incompatibles dos a dos. No tienen elementos en común. Todos albergan al menos una novela, por lo que la probabilidad asociada a cada estantería es no nula. La unión de las tres estanterías da todas las novelas exisentes. Por lo tanto, estamos ante un sistema completo de sucesos incompatibles dos a dos. Podemos aplicar, en consecuencia, el Teorema de Bayes.

$$P(C/N)=\frac{P(C)\cdot P(N/C)}{P(S)\cdot P(N/S)+P(C)\cdot P(N/C)+P(I)\cdot P(N/I)}$$

P(C/N): probabilidad buscada. Sabiendo que es una novela (N), ¿qué probabilidad hay de que venga de la estantería central (C).

P(S) = P(C) = P(I) = 1/3 → Probabilidad de elegir cada estantería (equiprobables).

P(N/S) = 3/10 → En la estantería superior hay 10 libros, de los cuales 3 son novelas.

P(N/C) = 8/14 = 4/7 → En la estantería central hay 14 libros, de los cuales 8 son novelas.

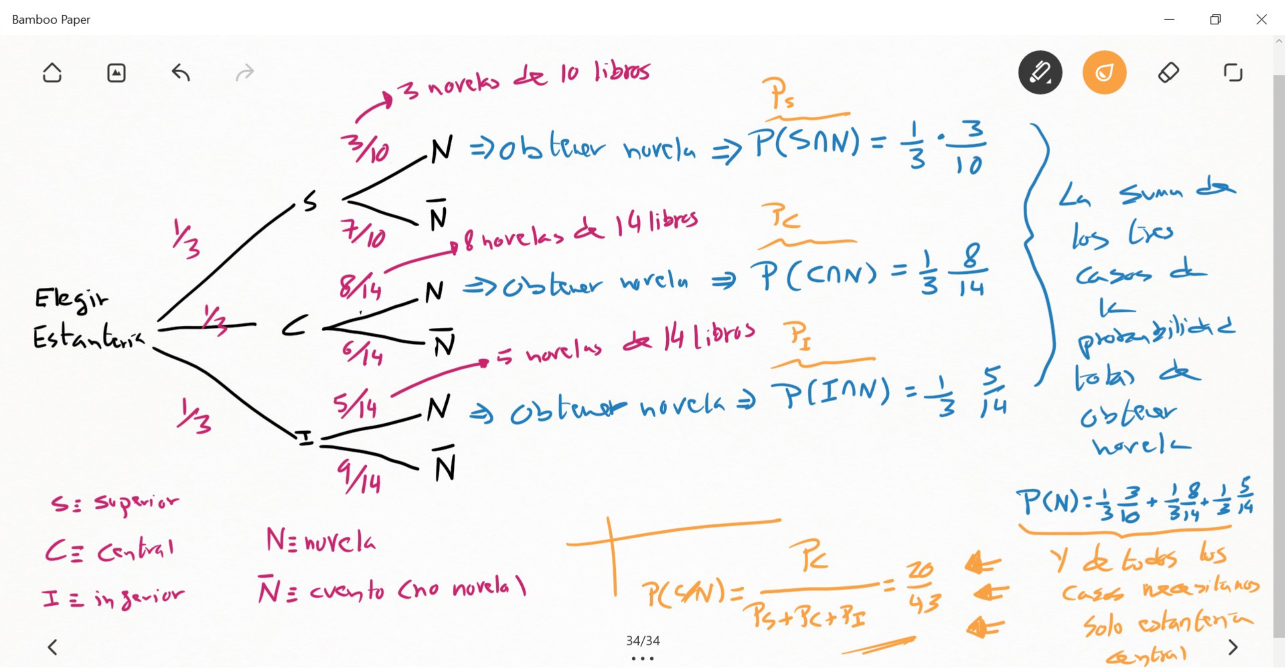
P(N/I) = 5/14 → En la estantería inferior hay 14 libros, de los cuales 5 son novelas.

$$P(C/N)=\frac{1/3\cdot 4/1}{1/3\cdot 3/10+1/3\cdot 4/7+1/3\cdot 5/14}=20/43$$

Forma 2: usando diagrama de árbol y dividir el caso favorable entre todos los casos factibles

La novela puede venir de Superior, Central o Inferior. Por lo que la probabilidad condicional que buscamos es la probabilidad de que venga de la estantería central dividido por la suma de las tres probabilidades de las tres estanterías.

El siguiente diagrama de árbol muestra todos los cálculos.



Ejercicios resueltos tipo Selectividad bloque C de Probabilidad

Selectividad Mates CCSS Andalucía Junio 2019

El 65% de los turistas que visitan una provincia elige alojamientos en la capital y el resto en zonas rurales. Además, el 75% de los turistas que se hospedan en la capital y el 15% de los que se hospedan en zonas rurales lo hace en hoteles, mientras que el resto lo hace en apartamentos turísticos. Se elige al azar un turita de los que se han alojado en la provincia.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que se haya hospedado en un hotel?

b) Si se sabe que el turista se ha hospedado en un apartamento turístico, cuál es la probabilidad de que el apartamento esté en zonas rurales?

a) Si consideramos los porcentajes como probabilidades (ley de los grandes número) los datos del enunciado son:

- P(capital) = 0,65
- P(rural) = 1 – 0,65 = 0,35
- P(hotel/capital) = 0,75 → Probabilidad condicionada: sabiendo que se hospeda seguro en la capital, cuál es la probabilidad de que esté en un hotel.
- P(hotel/rural) = 0,15 → Probabilidad condicionada: sabiendo que se hospeda seguro en zona rural, cuál es la probabilidad de que esté en un hotel

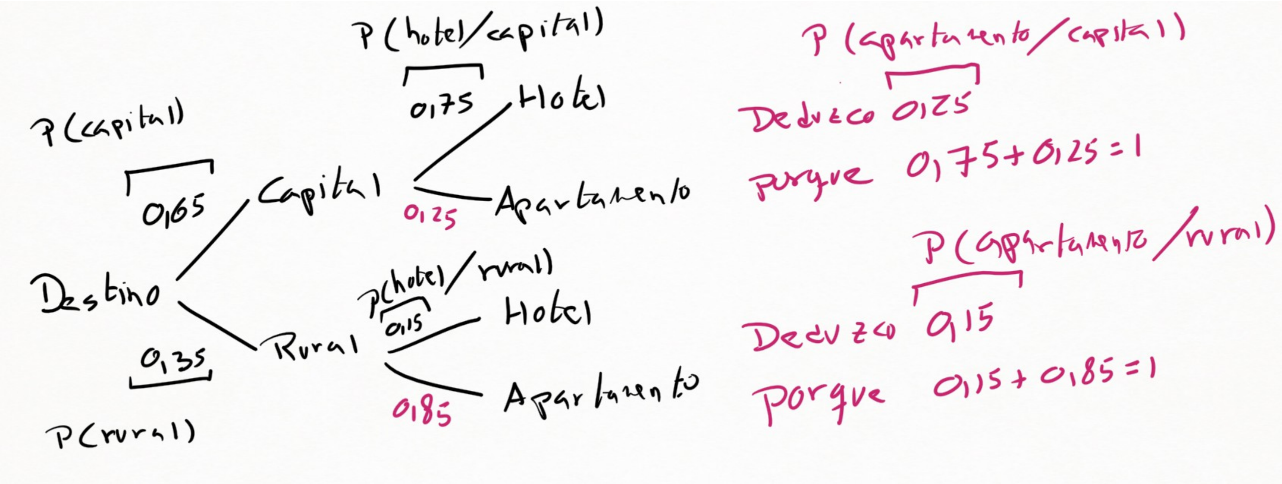
Los sucesos “hotel” y “rual” forman un espacio completo de sucesos incompatibles dos a dos, con probabilidades no nulas. Por lo tanto, para obtener la probabilidad total de encontrarse un turista en un hotel podemos usar el Teorema de Probabilidad Total:

P(hotel) = P(capital)·P(hotel/capital) + P(rural)·P(hotel/rural)

P(hotel) = 0,65·0,75 + 0,35·0,15 = 0,54

Como hemos visto en la teoría de este pdf, también podríamos haber resuelto el ejercicio dibujando el diagrama de árbol y sumando las probabilidades de las dos ramas que dan lugar a un alojamiento en hotel.

El diagrama de árbol nos vendrá bien para el siguiente apartado, donde tendremos que razonar los valores de probabilidades condicionadas que no da el enunciado directamente.



b) En este apartado nos preguntan por la siguiente probabilidad condicionada:

P(rural/apartamento) → Sabiendo seguro que se encuentra en apartamento turístico, saber qué probabilidad hay de que se encuentre en zona rural.

Podemos resolverlo por Teorema de Bayes, ya que tenemos información de las siguientes probabilidades condicionadas (razonadas en el diagrama de árbol):

- P(hotel/capital) = 0,75 → P(apartamento/capital) = 0,25 (ambos suman 1)
- P(hotel/rural) = 0,15 → P(apartamento/rural) = 0,85 (ambos suman 1)

$$P(rural/apartamento)=\frac{P(rural)\cdot P(apartamento/rural)}{P(rural)\cdot P(apartamento/rural)+P(capital)\cdot P(apartamento/capital)}$$

$$P(rural/apartamento)=\frac{0{,}35\cdot 0{,}85}{0{,}35\cdot 0{,}85+0{,}65\cdot 0{,}25}=0{,}6467$$

Selectividad Mates CCSS Andalucía Junio primera reserva 2019

Una cooperativa envasa zumos de naranja, zumos de piñas y zumos de melocotón en botellas de 1 litro y de 2 litros. Se sabe que el 60% de las botellas son de zumo de naranja y el 30% de piña. Además, el 80% de las botellas de zumo de naranja y el 70% de los zumos de piña son de 2 litros, mientras que el 60% de las botellas de melocotón son botellas de 1 litro.

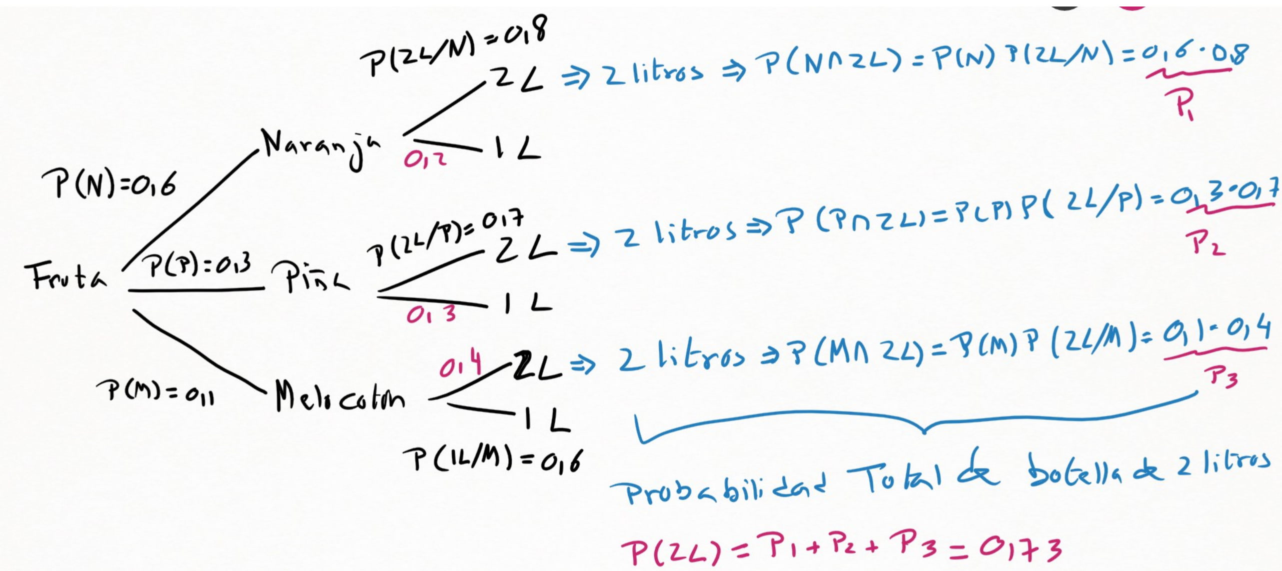
Se elige al azar una botella envasada por la cooperativa.

a) Calcula la probabilidad de que la botella sea de 2 litros.

b) Calcula la probabilidad de que el zumo sea de naranja, sabiendo que la botella es de 2 litros.

c) Calcula la probabilidad de que el zumo sea de melocotón, sabiendo que la botella es de 1 litro.

a) Al ser tanto datos, un diagrama de árbol siempre ayuda a organizar visualmente la información.



Podemos usar el Teorema de Probabilidad total, o bien razonar a partir del diagrama de árbol: sumar la probabilidad de las tres ramas que dan lugar a las botellas de 2 litros.

P(2 litros) = 0,6·0,8 + 0,3·07 + 0,1·0,4 = 0,73

b) El siguiente apartado afirma que si tenemos una botella de 2 litros, que probabilidad hay de que sea de naranja. Podemos aplicar Teorema de Bayes, o bien razonar a partir del diagrama de árbol y comprobar que en el apartado anterior ya hemos calculado la probabilidad de que la botella sea de 2 litros para cada una de las frutas.

Pues si tenemos las tres probabilidades para naranja, piña y melocotón, tan sólo deberemos dividir la probabilidad de la botella de litros de naranja entre la suma de las tres probabilidades. Es decir:

$$P(N/2\mathrm{L})=\frac{P(N)\cdot P(2\mathrm{L}/N)}{P(N)\cdot P(2\mathrm{L}/N)+P(P)\cdot P(2\mathrm{L}/P)+P(M)\cdot P(2\mathrm{L}/M)}$$

$$P(naranja/2\mathrm{L})=\frac{0{,}6\cdot 0{,}8}{0{,}6\cdot 0{,}8+0{,}3\cdot 0{,}7+0{,}1\cdot 0{,}4}=0{,}6575$$

c) Y este apartado es exactamente igual al apartado b), solo que en el diagrama de árbol debemos considerar las ramas que dan lugar a las botella de 1 litro.

$$P(M/1\mathrm{L})=\frac{0{,}1\cdot 0{,}6}{0{,}6\cdot 0{,}2+0{,}3\cdot 0{,}3+0{,}1\cdot 0{,}6}=0{,}22...$$