Preparando examen Selectividad Mates CCSS

Probabilidad - Definición

Índice de contenido

Probabilidad a posteriori

Supongamos que no sabemos nada de Matemáticas y que jamás hemos reflexionado sobre qué ocurre cuando lanzamos una moneda al aire.

¿Cómo saber cuántas veces saldrá cara y cuántas veces saldrá cruz?

Si lanzo una vez la moneda (y no está trucada)... es imposible saber si saldrá cara o cruz. Pero si repito el experimento muchas, muchas, muchas, muchas veces, el número de caras será muy parecido al número de cruces. Diremos que (en el caso ideal de tirar infinitas veces la moneda), la **frecuencia relativa** con que aparece cara coincide coincide con la frecuencia relativa con que aparece cruz.

Es decir, si la **frecuencia absoluta** es 1.000.000 de lanzamientos, la frecuencia relativa de la caras tenderá a 500.000 y la frecuencia relativa de las cruces tenderá también a 500.000.

Diremos, en términos de probabilidad, que la probabilidad de obtener cara es del 50% y la probabilidad de obtener cruz es del 50%. Si hablamos en **tanto por uno**, diremos que la probabilidad de obtener cara es 1/2 y la probabilidad de obtener cruz es 1/2.

Esto es un ejemplo de probabilidad a posteriori (después de repetir muchas veces el experimento). Y hace siglos, en los juegos de azar, se reflexionaba de esta manera: se repetía el juego muchas, muchas veces, y se observaba al valor al que tendría cada suceso posible del espacio muestral.

Probabilidad a priori. Regla de Laplace

¿Podemos llegar a la misma conclusión del ejemplo anterior, sin necesidad de repetir tantas y tantas veces un experimento?

Sí, suponiendo que cada suceso elemental es equiprobable (igual de probable) porque la moneda no está trucada. Es lo que se conoce como **regla de Laplace**:

Si poseemos un espacio muestral E con n-sucesos elementales equiprobables, la probabilidad de que acontezca un suceso elemental es 1/n.

En el caso de la moneda, nuestro espacio muestral posee dos sucesos elementales:

E = {cara, cruz}

Por lo que la probabilidad de cada suceso elemental será 1/2, ya que n = 2 en la regla de Laplace.

Otro ejemplo. Considera el experimento de lanzar un dado de seis caras. Y considera el suceso "Obtener un número mayor o igual que 5". Este suceso tendrá dos sucesos elementales:

A = {5, 6}

¿Cuál es la probabilidad de obtener uno de los sucesos elementales de A?

Si A posee 2 sucesos elementales y el espacio muestral cuenta con 6 sucesos, y todos los sucesos son equiprobables (el dado no está trucado) la probabilidad de obtener alguno de los sucesos de A será 2/6 = 1/3.

Podemos **generalizar la regla de Laplace** con la siguiente expresión:

Sea E un espacio muestral de n-sucesos elementales.

Sea A un suceso con m-sucesos elementales, siendo $m \leq n$ **.**

La probabilidad de A es igual al cociente entre el número de resultados favorables de A y el número de resultados posibles de E → $P(A) = \frac{n^o\ casos\ \ favorables}{n^o\ casos\ \ posibles} = \frac{m}{n}$

Esta forma de definir la probabilidad, matemáticamente hablando, es igual a realizar sobre la frecuencia relativa del razonamiento a posteriori el límite cuando el número de repeticiones del experimento tiende a infinito.

Es lo que se conoce como **ley de los grandes números: la probabilidad a posteriori (frecuencia relativa de A) y la probabilidad a priori (P(A)) coinciden en el caso límite de que el número de repeticiones tiende a infinito.**

Axiomas de probabilidad. Ejemplos resueltos

Sea E el espacio muestral de un experiment aleatorio. El concepto de probabilidad cumple las siguientes leyes (axiomas de Kolgomorov):

- La probabilidad total es 1 → P(E) = 1
- Cualquier suceso A cumple 0 ≤ P(A) ≤ 1
- Dados dos sucesos cualesquiera A y B se cumple que $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

  Restamos $P(A\cap B)$ para evitar contar dos veces los sucesos elementales pertenecientes a la intersección, ya que aparecen tanto en A como en B.
- **Cuando dos sucesos pueden realizarse a la vez, se llaman compatibles** (por ejemplo: el suceso “A” obtener un número par con un dado es compatible con el suceso “B· obtener el número 6 con el dado. Ambos sucesos tienen el elemento {6} en común si hacemos la intersección).
- **Si dos sucesos son incompatibles (no tienen sucesos elementales en común)**, la probabilidad de su unión es igual a la suma de sus probabilidades.

  $Si\ A\cap B=\emptyset \rightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

  Por ejemplo: el suceso “A” obtener un número par con un dado” es incompatible con el suceso B “obtener un número impar”. La intersección de ambos sucesos es el conjunto vacío → $Si\ A\cap B=\emptyset \rightarrow P(A\cap B)=0$
- La probabilidad del conjunto vacío (suceso imposible) es cero → $P(\emptyset)=0$
- La probabilidad de un suceso A y de su complementario cumplen la siguiente relación: $P(\overline{A})=1-P(A)$. O lo que es lo mismo: $P(A)+P(\overline{A})=1$
- Si A y B son dos sucesos, y A está incluido dentro de B, se cumple que $P(A)\leq P(B)$.
- Dados dos sucesos cualesquiera A y B se cumple que $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$
- Dados un conjunto de sucesos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k$ incompatibles dos a dos, la probabilidad de la unión es la suma de las probabilidades → $P(A_1\cup A_2\cup A_3\cup\ldots\cup A_k)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+\ldots+P(A_k)$

Ejemplo 1

Se una bolsa de 4 bolas rojas (R), 2 blancas (B) y 3 verdes (V).

¿Cuál es la probabilidad de extraer al azar una bola roja?

¿Y una bola blanca?

¿Y una verde?

Suponemos sucesos elementales equiprobables, por lo que según la regla de Laplace:

P(R) = 4/9 P(B) = 2/9 P(V) = 3/9

Fíjate que la suma P(R) + P(B) + P(V) es igual a 1, ya que los tres sucesos recogen todos los sucesos elementales posibles del espacio muestral.

Ejemplo 2

En una baraja española hay 40 cartas distribuidas en 4 palos: oros, copas, espadas y bastos. En cada palo hay 10 cartas (del 1 al 7, más sota, caballo y rey).

¿Cuál es la probabilidad de sacar un rey (R)? ¿Y de sacar una copa (C)? ¿Y de sacar un oro (O) o una copa (C)?

Suponemos sucesos elementales equiprobables, por lo que según la regla de Laplace:

P(R) = 4/40 = 1/10 (hay 4 casos favorables de un total de 40 cartas diferentes)

P(C) = 10/40 = 1/4 (hay 10 casos favorables de un total de 40 cartas diferentes)

Para sacar la probabilidad de sacar oro (O) o copa (C) podemos razonar de dos maneras distintas. Entre oros y copas hay 20 cartas de un total de 40, por lo tanto:

$$P(O \cup C) = 20/40 = 1/2$$

O bien podems decir. El suceso O "sacar oro" es incompatible con el suceso C "sacar copa" porque no hay cartas en común entre ambos sucesos. Por lo tanto, la probabilidad de la unión es la suma de probabilidades de cada suceso:

$$P(O \cup C) = P(O) + P(C) = 10/40 + 10/40 = 1/2$$

Fíjate que la conjunción "o" se sustituye por el operador unión. Más adelante veremos que la conjunción "y" se sustituye por el operador intersección.

Ejemplo 3

En una clase hay 15 chicos y 14 chicas. Se eligen dos alumnos al azar. ¿Qué probabilidad hay de que los dos alumnos elegidos sean chicas?

Tenemos dos experimentos aleatorios consecutivos.

El primero es elegir una chica entre un grupo de 29 alumnos. Según la regla de Laplace la probabilidad será 14/29 (casos favorables dividido por los casos posibles).

En el segundo experimento tendremos 13 chicas (hemos quitado la que salió elegida en el primer experimento) y un total de 28 alumnos. La probabilidad será 13/28.

Se tiene que cumplir el primer experimento y el segundo experimento. Cuando esto ocurre, la probabilidad total es el producto de ambas probabilidades.

$$P = \frac{14}{29} \cdot \frac{13}{28} = 0{,}22$$

Ejemplo 4

Se sabe que las probabilidades de dos sucesos A y B son P(A)=0,5 y P(B)=0,7. También se sabe que la probabilidad de su intersección es 0,3. ¿Cuánto vale la probabilidad de la unión?

Según los axiomas de probabilidad:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0{,}5+0{,}7-0{,}3=0{,}9$$

Ejemplo 5

En una baraja española, ¿cuál es la probabilidad de elegir al azar una carta de bastos o que sea una figura?

Tenemos suceso A “elegir bastos” y el suceso B “elegir figura”. La conjunción “o” del enunciado podemos sustituirla por el operador unión.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

Probabilidad de bastos → P(A) = 10/40 = 1/4

Probabilidad de figura → Hay 12 figuras entre los cuatro palos → P(B) = 12/40 = 3/10

La intersección entre A y B da lugar a las cartas que son bastos y figura. **Fíjate que la intersección se cambia por la conjunción “y”**. En total hay 3 cartas que sean figuras de bastos: sota de bastos, caballo de bastos y rey de bastos → P(A ∩ B) = 3/40.

Por lo tanto:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=1/4+3/10-3/40=19/40$$

Ejemplo 6

En una baraja española, ¿cuál es la probabilidad de elegir al azar una carta de bastos que no sea una figura?

Tenemos suceso A “elegir bastos” y el suceso B “elegir figura”. Ahora buscamos que se cumpla A pero que no se cumpla B. Podemos razonar de dos formas.

Las cartas de bastos que no son figura son 7. Por lo tanto, la probabilidad que nos piden es 7/40.

Otra forma de razonar es usando los axiomas.

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$$

Como razonamos en el ejemplo anterior, P(A)=1/4 mientras que P(A ∩ B) = 3/40. Po lo tanto → $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=1/4-3/40=7/40$

Ejemplo 7

Sean dos sucesos A y B. Expresar, usando operaciones con sucesos, los siguientes casos:

a) Que no ocurra ninguno de los dos

b) Que ocurra al menos uno de los dos

c) Que ocurra B pero no ocurra A

a) No puede ocurrir A ni B → Nuevamente cambiamos la conjunción "y" por la intersección → $\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}$

b) Debe ocurrir A o bien B → Cambiamos "o" por el operador union → $A\cup B$

c) Debe ocurrir B y no debe ocurrir A. Cambiamos "y" por operador intersección y usamos el complmentario de A → $B\cap\overline{A}$

Ejemplo 8

Lanzamos un dados de seis caras. El suceso A es "obtener un número mayor que 4" y el suceso B es "obtener un número par". Escribe los elementos de:

a) A **b) B**

c) $A^c\cup B$ **d)** $(A\cap B)^c$

e) Calcular las probabildades $P(\overline{A}\cap\overline{B})$ **y** $P(\overline{A}\cup\overline{B})$

a) A = {5, 6}

b) B = {2, 4, 6}

c) $A^c\cup B$ → El complementario de A es $A^c=\{1,2,3,4\}$, por lo que al hacer la unión con B resulta → $A^c\cup B=\{1,2,3,4,6\}$

d) La intersección de A y B son los elementos en común entre los dos → $A\cap B=\{6\}$ → La negación de la intersección queda $(A\cap B)^c=\overline{A\cap B}=\{1,2,3,4,5\}$

e) $P(\overline{A}\cap\overline{B})$ → Por leyes de Morgan → $P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})$

Como vimos en los axiomas → $P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)$

El suceso unión de A con B da lugar a los elementos {2, 4, 5, 6} → Por la regla de Laplace $P(A\cup B)=4/6=2/3$

Por lo tanto → $P(\overline{A\cup B})=1-2/3=1/3$

$P(\overline{A}\cup\overline{B})$ → Por leyes de Morgan → $P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{A\cap B})$

Por los axiomas → $P(\overline{A\cap B})=1-P(A\cap B)$

La intersección de A y B da lugar al elemento {6} → Por Laplace → $P(A\cap B)=1/6$

Por lo tanto → $P(\overline{A\cap B})=1-1/6=5/6$

Ejemplo 9

En un centro escolar el 80% de los alumnos practica algún deporte. El 25% toca un instrumento musical. El 15% realiza ambas actividades. Calcula la probabilidad de que un alumno elegido al azar no realice ninguna de las actividades.

Suceso A: "practicar deporte" → P(A) = 0,8 (casos favorables entre casos totales)

Suceso B: "tocar instrumento" → P(B) = 0,25

Necesitamos que no se cumpla A y que no se cumpla B. Si cambiamos la conjunción "y" por el operador intersección → $P(\overline{A}\cap\overline{B})$

Según las leyes de Morgan → $P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})$

Según los axiomas de probabilidad → $P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)$

Sabemos que $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$, donde la probabilidad de intersección coincide con la probabilidad de que un alumno haga deporte y toque un instrumento (nuevamente, intercambiamos la conjunción "y" con el operador intersección) → $P(A\cap B)=0{,}15$.

En consecuencia → $P(A\cup B)=0{,}8+0{,}25-0{,}15=0{,}90$ → $P(\overline{A\cup B})=1-0{,}9=0{,}10$

Técnicas de recuento. Diagrama de árbol

El método más intuitivo de contar el número de sucesos elementales que pueden aparecer en muchos experimentos aleatorios es multiplicar las m-maneras que primeramente puede mostrar un suceso por las n-formas distintas que, a su vez, cada suceso puede combinarse.

Ejemplo: Si una persona tiene 5 camisas y 4 pantalones, ¿de cuántas formas distintas puede vestirse?

$5 \times 4 = 20$ Formas distintas

Otro ejemplo: Con los digitos del 1 al 8, ¿cuántos números de cuatro cifras se pueden formar? ¿Y si las cifras no pueen repetirse?

La forma general de un numero de cuatro cifras es $XYZT$.

Si puede haber repetición de cifras, en la primera cifra hay 8 posibilidades, en la segunda cifra 8 posibilidades, en la tercera cifea 8 posibilidades y en la cuarta cifra 8 posibilidades. Por lo tanto: $8 \times 8 \times 8 \times 8 = 4.096$ números distintos.

Si no puede haber repetición, en la primera cifra hay 8 posibilidades, en la segunda cifra hay 7 posibilidades (ocho menos uno), en la tercera cifra hay 6 posibilidades (siete menos uno) y en la cuarta cifra hay 5 posibilidades (cinco menos uno). Por lo tanto: $8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1.680$ números distintos

Cuano el número de elecciones es reducido también es recurrente el uso de un **diagrama de árbol**. Es un esquema en el que se indica el número y nombre de las sucesivas elecciones, indicando la probabilidad de cada opción.

Para hacer un diagrama de árbol, se abren tantas ramas como resultados posibles tenga el experimento. En cada rama se indica la probabilidad del suceso correspondiente.

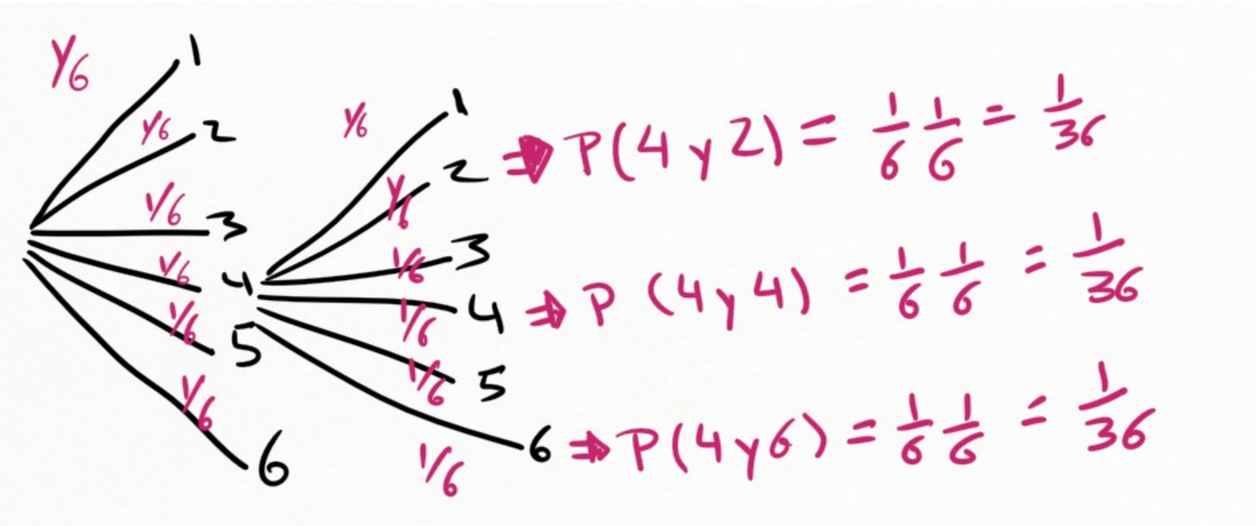
Una vez terminado el árbol, para calcular la probabilidad del suceso que representa una de las ramificaciones, se multiplican las probabilidades que aparecen a lo largo de todas las ramas que forman dicha ramificación.

Y si el suceso comprende varias ramas, su probabilidad se obtiene sumando las probabilidades de cada una de las ramas.

La suma de todas las ramas que parten de un mismo punto es igual a uno.

Ejemplo: Dibuja el diagrama de árbol del suceso de lanzar dos veces un dado y obtener primero un 4 y luego un 2. Y dibujar el diagrama de árbol del suceso de sacar primero un 4 y luego un número par.

Indicar la probabilidad de cada uno de los sucesos anteriores.



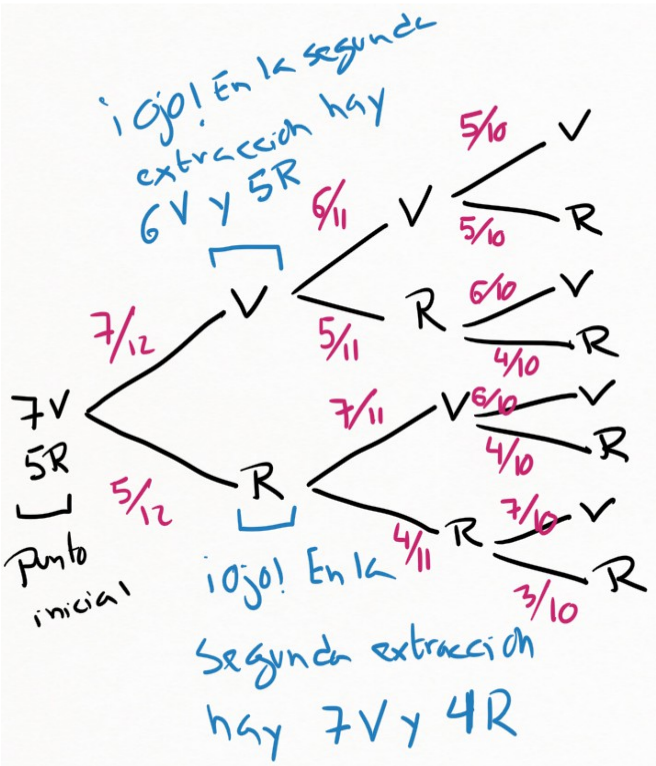
En la imagen superior, del primer punto en común, salen seis ramas. Cada rama es equiprobable, por lo que la probabilidad de obtener un 4 es 1/6.

Una vez obtenido el número 4, lanzamos el segundo dado. Desde 4 salen otras seis ramificaciones. Cada una, nuevamente, con probabilidad 1/6. En consecuencia, la probabilidad de sacar un 4 y luego sacar un 6 será 1/6 · 1/6 = 1/36 (producto de todas las ramificaciones que dan lugar al suceso).

Si ahora consideramos que en el segundo dado puede salir 2, 4 o 6, tendremos tres ramas con probabilidad 1/36. Como son tres ramas diferentes, debemos subar sus probabilidades: 1/36 + 1/36 + 1/36 = 3/36 = 1/12

Un último ejemplo para cerrar este bloque: Se tiene una bolsa con 7 bolas verdes (V) y 5 bolas rojas (R). Se extraen sucesivamente, y sin reemplazamiento, tres bolas. Confeccionar el diagrama de árbol con todos los sucesos posibles.

La imagen de la derecha indica el diagrama de árbol de todos lo sucesos. A modo de aclaración, en azul, se explica que tras sacar una primera bola V quedan 6V y 5R. Y al sacar una primera bola R quedan 7R y 4R.



Aplicando un razonamiento análogo cada vez que saquemos una bola, podemos obtener las diferentes probabilidades aplicando la regla de Laplace.

Resumen de ideas clave de este pdf

1.

Regla de Laplace → $P(A)=\frac{n^o\ casos\ \ favorables}{n^o\ casos\ \ posibles}=\frac{m}{n}$

2.

Dados dos sucesos cualesquiera A y B se cumple que $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

3.

Si los sucesos son compatibles tienen elemento en común. Por lo tanto, su intersección no está vacía.

Si los sucesos son incompatibles significa que $A\cap B=\emptyset \rightarrow P(A\cap B)=0$

Si $P(A\cap B)=0$ → A y B son incompatibles y cumplen $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

4.

Un suceso y su complementario cumplen → $P(A)+P(\overline{A})=1$

5.

Dados dos sucesos cualesquiera A y B se cumple que $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$

Si $P(A\cap B)=0$ → A y B son incompatibles y cumplen $P(A-B)=P(A)$

6.

En un diagrama de árbol, para calcular la probabilidad del suceso que representa una de las ramificaciones, se multiplican las probabilidades que aparecen a lo largo de todas las ramas que forman dicha ramificación.

Y si el suceso comprende varias ramas, su probabilidad se obtiene sumando las probabilidades de cada una de las ramas.

La suma de todas las ramas que parten de un mismo punto es igual a uno.