Preparando examen Selectividad Mates CCSS

Probabilidad - Espacio de sucesos y Álgebra de Boole

Índice de contenido

¿Qué es un experimento aleatorio? Espacio muestral y sucesos

Un experimento aleatorio es aquel que, manteniendo las mismas condiciones en la experiencia, **no se puede predecir el resultado**.

Ejemplos: lanzar un dado o sacar una bola de una bolsa opaca llena de bolas de colores diferentes.

Al realizar un experimento aleatorio existen varios posibles resultados (**sucesos posibles**). Y en cada experimento siempre se obtendrá uno de esos posibles resultados. Cada suceso posible se llama **suceso elemental**.

Ejemplo: al tirar un dado de seis caras, saldrá un número entero entre 1 y 6. Por lo tanto, hay seis sucesos elementales.

El conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio se llama **espacio muestral (E)**. El conjunto de todos los sucesos elementales forma el espacio muestral.

Ejemplo: en el lanzamiento de un dado de seis caras el espacio muestral es el conjunto de todos los sucesos elementales: $E=\{1,2,3,4,5,6\}$

Varios sucesos elementales unidos forman un subconjunto del espacio muestral, formando lo que se conoce un **suceso S**. Es decir, un suceso S es un subconjunto del conjunto de posibles resultados. Por lo tanto, **cualquier suceso S estará incluido dentro del espacio muestral**: $S\subset E$ (ojo, **no confundir suceso elemental con suceso S. Para evitar confusión, se puede hablar de "suceso compuesto" al hablar de un suceso S que está formado por más de un suceso elemental**).

Ejemplo: el suceso $S=\{1,3,6\}$ contiene tres sucesos elementales y es un subconjunto del espacio muestral $E=\{1,2,3,4,5,6\}$ asociado al lanzamiento de un dado de seis caras: $S\subset E$

Un ejemplo con monedas.

Escribir el conjunto de sucesos posibles resultante de lanzar dos veces una moneda.

$E=\{(cara,cara),(cara,cruz),(cruz,cara),(cruz,cruz)\}$

Escribir el suceso "sacar cero caras" entre las dos tiradas.

$S=\{(cruz,cruz)\}$ → Se observa fácilmente que $S\subset E$

Escribir el suceso "sacar una sola cara" entre las dos tiradas.

$S=\{(cara,cruz),(cruz,cara)\}$ → Se observa fácilmente que $S\subset E$

Otro ejemplo con bolas.

Escribir el conjunto de sucesos posibles resultante de sacar dos bolas de una bolsa que contiene una bola negra, otra roja y otra blanca.

$E=\{(N,R),(N,B),(R,N),(R,B),(B,N),(B,R)\}$ → Fíjate que el orden influye. No es lo mismo sacar primero Negro y segundo Rojo, que sacar primero Rojo y segundo Negro.

Escribir el suceso "no sacar la bola negra" entre las dos bolas que se obtienen.

$S=\{(R,B),(B,R)\}$ → Se observa fácilmente que $S\subset E$

Un **suceso imposible** es el que nunca puede ocurrir en el experimento aleatorio. Se representa por el conjunto vacío: $\emptyset$. El **suceso seguro** es aquel que coincide con el espacio muestral E , por lo que seguro que siempre se cumple. Los subconjuntos $\emptyset$ y E se consideran subconjuntos impropios del espacio muestral.

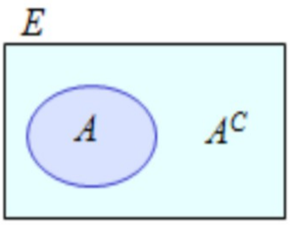
Ejemplo: obtener un 7 con una tirada de un dado clásico de 6 caras es imposible, por lo que se considera suceso imposible. Obtener un número entre 1 y 6 al lanzar un dado es un suceso seguro.

Dos **sucesos son iguales** si contienen los mismos sucesos elementales.

Ejemplo: el suceso "obtener un 5 ó un 6" en una tirada del dado es $A=\{5,6\}$. Y el suceso "obtener más de un 4" en una tirada es $B=\{5,6\}$. Ambos sucesos contienen los mismos sucesos elementales, por lo que son iguales.

Un **suceso complementario o contrario** de A es el que se cumple cuando no se realiza A. Lo representamos por $\bar{A}$ o bien por A^c .

Ejemplo: Dado el suceso "obtener cara" al lanzar una moneda, el suceso complementario será "obtener cruz". Es decir: $A=\{cara\}$, $\bar{A}=\{cruz\}$

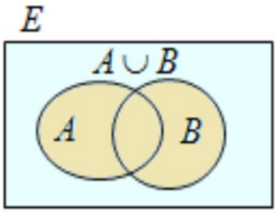


Operaciones con sucesos. Álgebra de Boole

Existen tres operaciones fundamentales entre sucesos, que dan como resultado un nuevo suceso

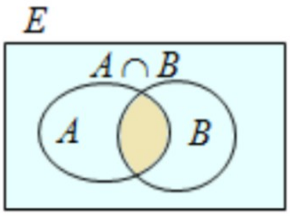
- **Unión de dos sucesos** → $A \cup B$ → Se verifica si se cumple A o se cumple B (es válido si se cumpla al menos uno de los dos sucesos).

  La unión de un suceso A y de su complementario da lugar a todo el espacio muestral → $A \cup \bar{A} = E$



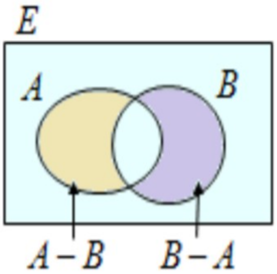
- **Intersección de dos sucesos** → $A \cap B$ → Se verifica si se cumple A y si se cumple B (es válido si se cumplen los dos sucesos).

  Dos sucesos incompatibles son lo que no tienen sucesos elementales en común, es decir, los que la intersección da lugar al conjunto vacío → Si $A \cap B = \emptyset$ significa que A y B son incompatibles.



- **Diferencia de dos sucesos** → $A - B$ → Se verifica si se cumple A y no se cumple B (es válido si se cumple A pero no se cumple B).

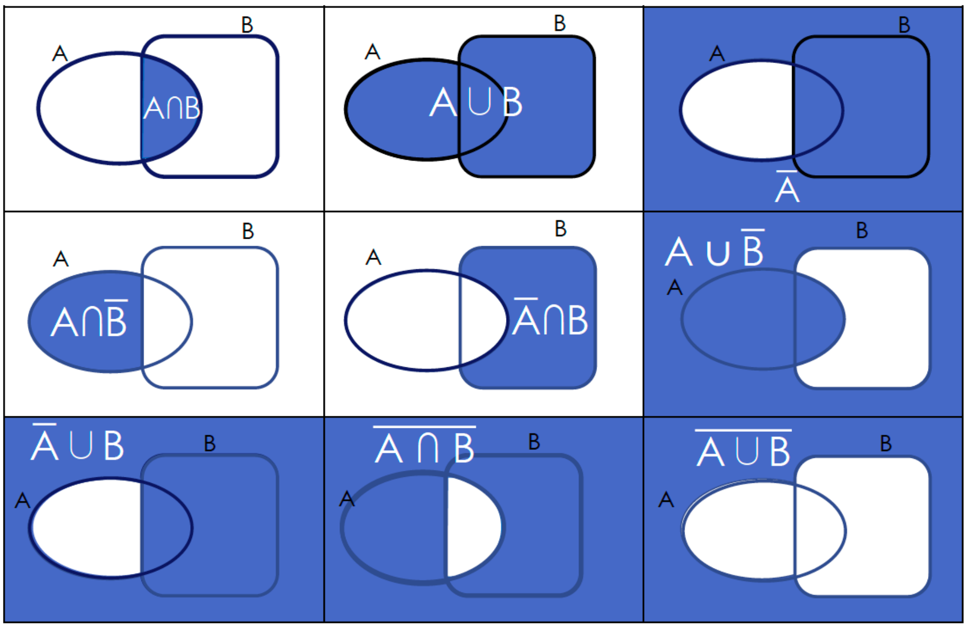
  Una consecuencia de esta definición es que $\bar{A} = E - A$ (se cumplen todos los sucesos del espacio muestral salvo los sucesos de A)



La unión, la intersección y la diferencia cumplen las siguientes propiedades, conocidas como Álgebra de Boole (a las que se añaden las conocidas como Leyes de Morgan).

Propiedad	**Unión**	**Intersección**
Conmutativa	$A\cup B=B\cup A$	$A\cap B=B\cap A$
Asociativa	$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$	$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$
Idempotente	$A\cup A=A$	$A\cap A=A$
Simplificación	$A\cup(B\cap A)=A$	$A\cap(B\cup A)=A$
Distributiva	$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$	$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
Elemento neutro	$A\cup\emptyset=A$	$A\cap E=A$
Elemento absorbente	$A\cup E=E$	$A\cap\emptyset=\emptyset$
Leyes de Morgan	$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$ El complementario de la unión es la intersección de complementarios	$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$ El complementario de la intersección es la unión de complementarios

Diagramas de Venn para representar algunas de las propiedades de la tabla anterior.



Ejemplo de aplicación

Tenemos una baraja española y sacamos una carta al azar. Definimos A al suceso “sacar un oro” y B al suceso “sacar un rey”. Escribe los sucesos siguientes:

- $A\cup B$ → Sacar un oro o bien sacar un rey (se cumple al menos uno de los dos sucesos de partida).
- $A\cap B$ → Sacar el rey de oro (se cumplen los dos sucesos de partida).
- $A-B$ → Sacar cualquier oro, salvo el rey de oro (se cumple A pero no se cumple B).
- $\overline{A}$ → No sacar ningún oro.
- $\overline{A\cup B}$ → Por las propiedades se cumple $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ → No sacar oro y no sacar un rey (no se cumple ni A ni B).
- $\overline{A}\cup\overline{B}$ → No sacar oro o bien no sacar un rey (se cumple al menos uno de los dos sucesos complementarios).

d