Preparando examen Selectividad Mates CCSS

Programación-lineal

Índice de contenido

Región factible y conjunto convexo

La región del plano delimitada por la solución general de un sistema de inecuaciones lineales de dos incógnitas se llama **región factible**.

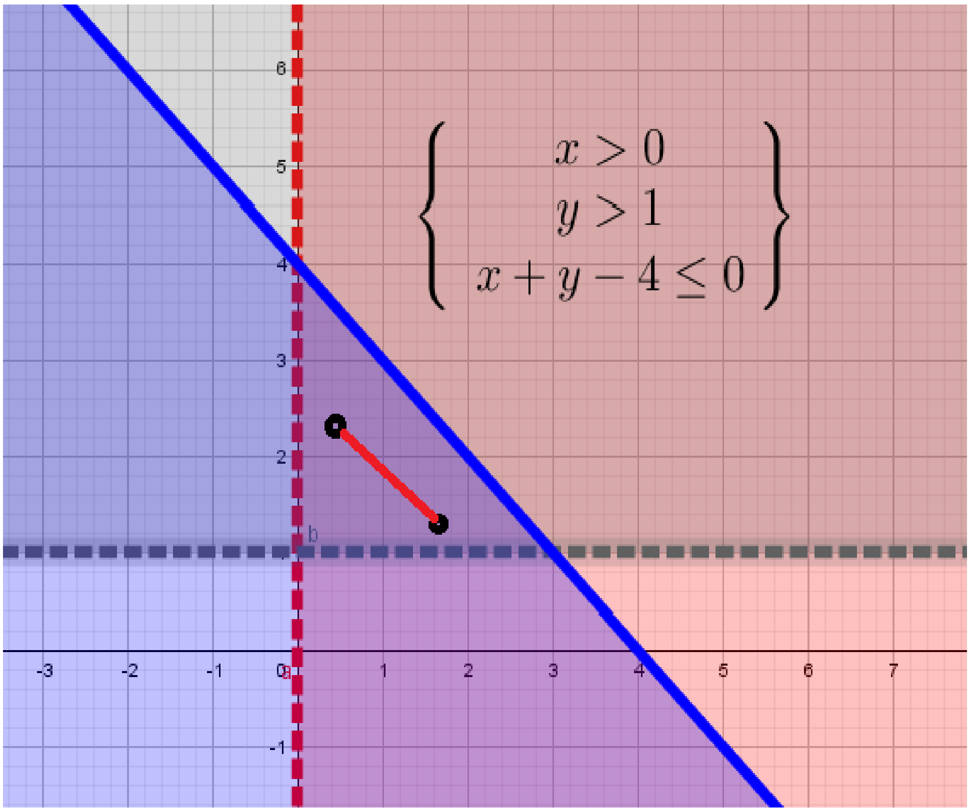
Todos los puntos (x, y) de la región factible cumplen todos los requisitos de las inecuaciones del sistema.

Cada punto de la región factible es una solución particular. Mientras que **toda la región factible se llama solución general**.

Si ningún punto del plano satisface todas las inecuaciones, diremos que el sistema de inecuaciones no tiene solución.

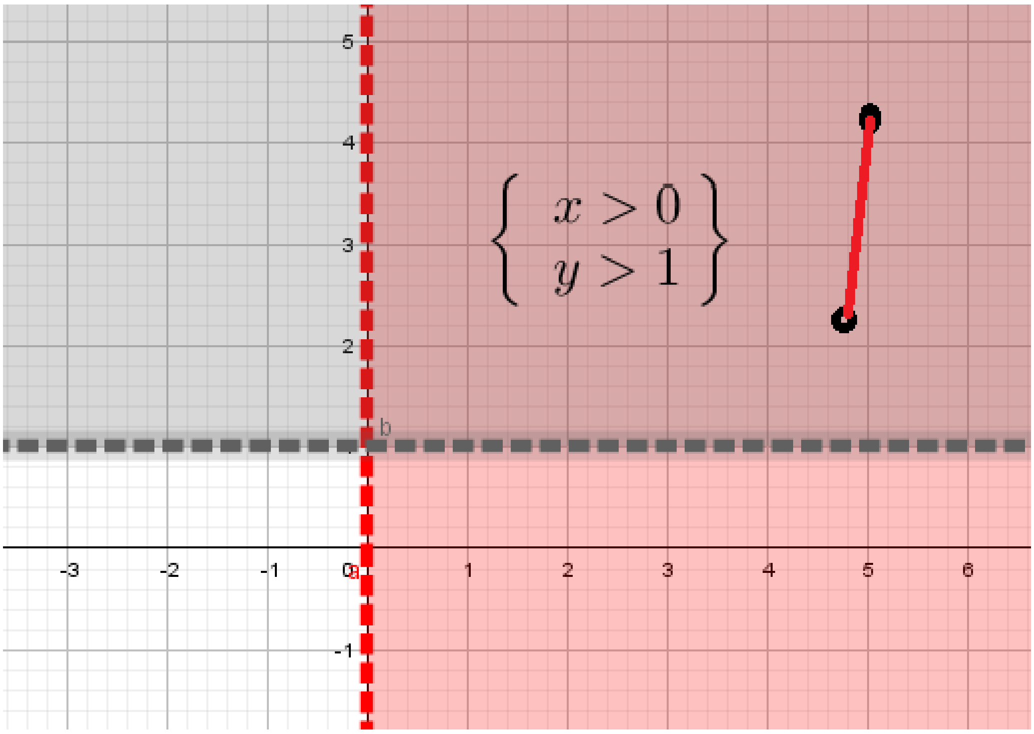
Si la región factible está encerrada por un polígono, diremos que la solución está **acotada**.

Imagen 1. *El triángulo de la figura forma la región factible solución de un sistema de tres inecuaciones lineales. Los lados rojos y negros van discontinuos porque las inecuaciones asociadas a esos lados son estrictas. El lado azul es continuo porque la desigualdad asociada a ese lado lleva el signo igual. Como toda la región factible está acotada por el triángulo, diremos que la solución general está acotada. El segmento que une dos puntos cualesquieras de la región queda dentro de la región factible, por lo que el triángulo genera un conjunto convexo.*



Si la región factible no está encerrada por un polígono, diremos que la solución **no está acotada**. En este caso, la región solución se extiende hasta el infinito.

Imagen 2. *La solución del siguiente sistema de dos inecuaciones lineales no está totalmente delimitada por los lados de un polígono. Diremos que la solución no está acotada. La rectas roja y negra va en trazo discontinuo porque no pertenecen a la solución, ya que sus inecuaciones asociadas son estrictas. Nuevamente, el segmento que une dos puntos cualesquiera de la región factible queda dentro de dicha región, por lo que la región factible es un conjunto convexo.*



La recta que forma un lado que delimita la solución es continua si la inecuación asociada a ese lado contiene el signo igual. En ese caso, el lado pertenece a la solución.

Si la desigualdad es estricta, la recta se dibuja con trazo discontinuo y ese lado no pertenece a la solución.

Los puntos solución de la región factible forman siempre un **conjunto convexo**. La definición de conjunto convexo es aquella región del plano que, al unir dos puntos cualesquiera de dicha región, el segmento que los une siempre queda dentro del propio conjunto (**ver imágenes 1 y 2**).

Función objetivo. Teorema fundamental de la programación lineal

Cada inecuación de un sistema de inecuaciones lineales es una restricción que deben cumplir los puntos del plano (x, y) . Todas las inecuaciones forman el conjunto completo de restricciones.

Una **función objetivo de dos variables** $f(x, y)$ es una función lineal del tipo $f(x, y)=ax+by+c$ (donde (a, b, c) son números reales), cuyas variables están delimitadas por las restricciones de un sistema de inecuaciones lineales. Es decir, las variables x, y solo pueden tomar los valores permitidos por la región factible solución del sistema de inecuaciones.

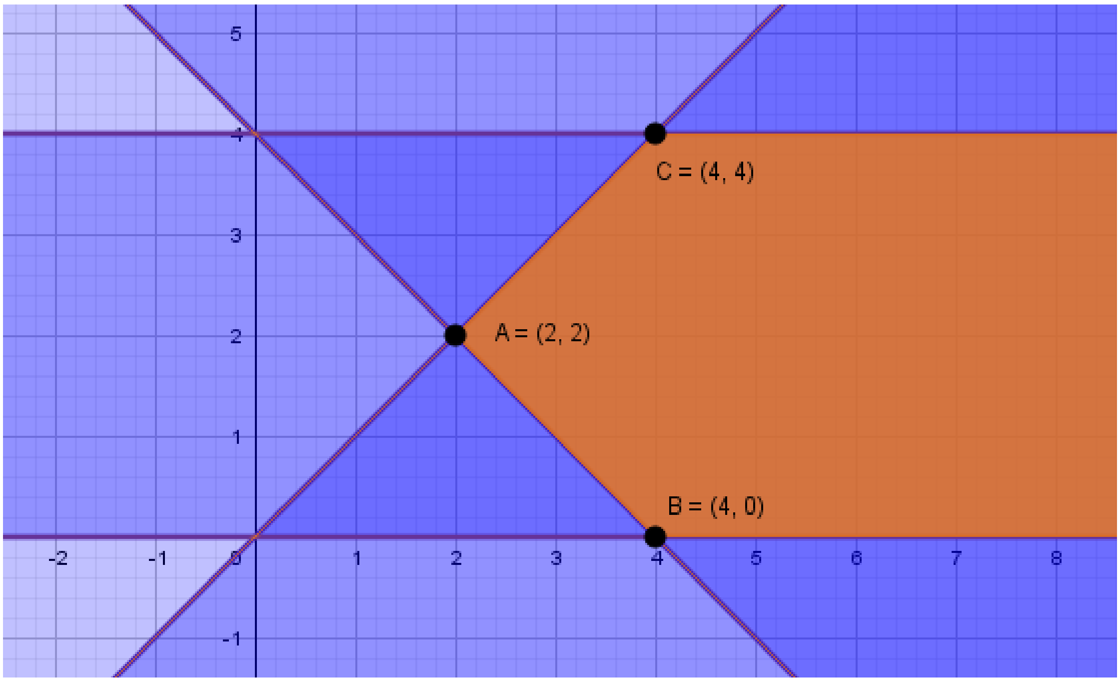
En determinados problemas relacionados con la economía y las ciencias sociales, es interesante obtener el valor más grande posible (máximo) que puede tomar $f(x, y)$ cumpliendo las restricciones del sistema de inecuaciones. O calcular el valor más pequeño posible (mínimo) que puede tomar $f(x, y)$ cumpliendo esas mismas restricciones. Es lo que se conoce como **solución óptima de la función objetivo**. Y obtener esta solución óptima genera los problemas conocidos como **programación lineal**.

El **Teorema fundamental de la programación lineal afirma que en una función objetivo de dos variables delimitada por un conjunto convexo, si existe una solución particular que optimice la imagen de la función objetivo, esta solución se encuentra en un vértice de la región factible o en el segmento que une dos vértices (llamado lado), pero nunca en el interior de dicha región factible**.

A este teorema podemos añadir tres afirmaciones:

- Si la **región fatible es acotada**, el problema de programación lineal **siempre tiene solución**.
- Si **dos vértices optimizan la función objetivo** con el mismo valor, **todos los puntos del segmento que une a dichos vértices también optimizan a la función**. En este caso, habría infinitos puntos solución al problema de programación lineal.
- Si la **región factible no está acotada**, **no siempre será posible encontrar al máximo y/o al mínimo**. **Pero si existen, se encontrarán en al menos uno de los vértices de la región**. ¡Ojo! Si, por ejemplo, dos vértices conectados por un lado maximizan la función, todos los puntos de ese lado serán solución del problema de optimización. Y si un vértice forma parte de un lado infinitamente largo (al ser región no acotada), debemos tomar un punto de ese lado, evaluar la función objetivo, y comprobar numéricamente si todos los puntos de ese lado optimizan la función objetivo al igual que el vértice. Esto vamos a explicarlo con más detalle a partir de la **imagen 3**.

Imagen 3. *La región factible de la imagen (color naranja) no está acotada. Es un conjunto convexo, pero no está acotado porque por un lado la región se expande hasta el infinito.*



Viendo la **imagen 3**, supongamos que deseamos minimizar una función objetivo $f(x,y)$. Para ellos sustituimos en la función las coordenadas (x,y) de cada vértice A, B y C. Según la forma de la ecuación de la función $f(x,y)$ puede ocurrir:

- La imagen más pequeña acontezca solo en A → el punto A es la solución.
- La imagen más pequeña acontezca solo en B → el punto B es la solución.
- La imagen más pequeña acontezca solo en C → el punto C es la solución.
- La imagen más pequeña coincida en A y B → todos los puntos del segmento AB son solución.
- La imagen más pequeña coincida en A y C → todos los puntos del segmento AC son solución.
- Ojo. La imagen más pequeña ocurre en B y al coger otro punto del lado que va desde B hacia la derecha, ese punto genera la misma imagen que B → todos los puntos del lado infinito a la derecha de B son solución.
- Ojo. La imagen más pequeña ocurre en C y al coger otro punto del lado que va desde C hacia la derecha, ese punto genera la misma imagen que C → todos los puntos del lado infinito a la derecha de C son solución.

- Ojo. La imagen más pequeña entre los vértices ocurre en B y al coger otro punto del lado que va desde B hacia la derecha, ese punto genera una imagen aún más pequeña que la imagen de la función B → no hay solución.
- Ojo. La imagen más pequeña entre los vértices ocurre en C y al coger otro punto del lado que va desde C hacia la derecha, ese punto genera una imagen aún más pequeña que la imagen de la función C → no hay solución.

Este caso de regiones factibles no acotadas son (viendo los exámenes de Selectividad de Mates CCSS de los últimos años) poco probables que caigan. Por lo tanto, si la región a estudiar es acotada todo se simplifica mucho, porque con ver la imagen de $f(x,y)$ en cada vértice, es suficiente para determinar la solución del problema de programación lineal.

Pasos a realizar para resolver problemas de programación lineal

Por norma general, en el examen de Selectividad, vamos a encontrarnos con un enunciado extenso que genera el problema de programación lineal.

La forma de proceder en su resolución es la siguiente.

1. Detectar del enunciado las variables x,y y formar la función objetivo $f(x,y)=ax+by$, donde (a,b) son números reales. Son muy típicas las funciones objetivas de ganancia máxima o de coste mínimo.

2. Escribir las restricciones que marca el enunciado en forma de inecuación, formando así un sistema de inecuaciones lineales.

3. Obtener la región factible del sistema. Es decir, resolver gráficamente el sistema de inecuaciones, calculando las coordenadas de los vérticies que forman la región factible e indicando claramente si los lados de la región factible pertenecen o no a la solución final.

4. Evaluar la función $f(x,y)=ax+by$ en las coordenadas de los vértices y decidir si aparecen máximos o mínimos, comparando las imágenes obtenidas y nombrando el Teorema fundamental de la programación lineal. Recuerda que si el punto óptimo aparece en dos vértices, todos los puntos del segmento que une esos vértices son puntos óptimos.

Un primer ejemplo para ir calentando motores.

Sea la función objetivo $f(x,y)=5x+4y$ a maximizar. Y sean las restricciones marcadas por el sistema de inecuaciones lineales $\left\{\begin{array}{c} 2x+y\leq 1000 \\ 2x+3y\leq 1500 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{array}\right\}$ **.**

Obtener la región factible y obtener valores que optimizan a la función objetivo.

La función objetivo según el enunciado es:

$f(x,y)=5x+4y$

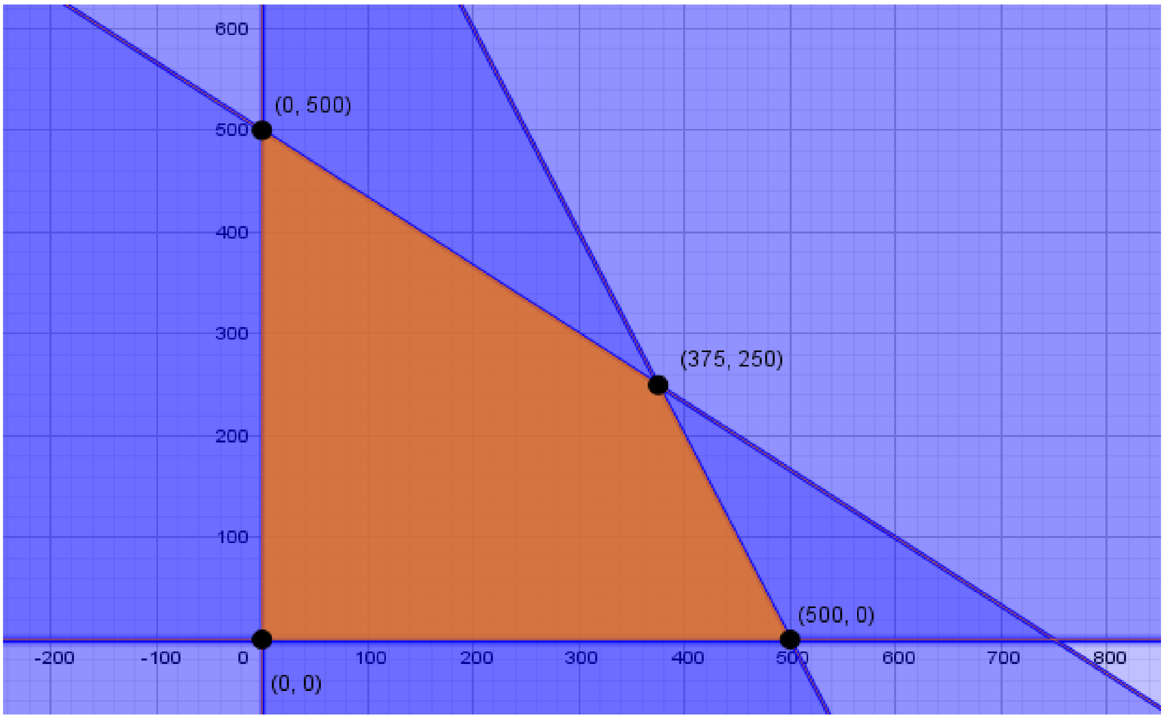
Tenemos cuatro inecuaciones. Obtenemos gráficamente la región factible, indicando claramente los vértices y si los lados pertenecen o no a la solución general.

Cada inecuación posee una recta asociada. Ya sabes dibujar rectas: con dos puntos es suficiente. Y hemos estudiado en pdfs anteriores cómo resolver gráficamente cada una de las inecuaciones lineales.

Los vértices de la región factible se obtienen planteando sistemas 2x2 con las dos rectas que forman el vértice.

Los lados de la región factible se dibujan continuos si pertenecen a la solución, y eso ocurre cuando aparece el signo igual en la desigualdad.

Imagen 4*. Región factible acotada. El polígono forma un conjunto convexo. Los cuatro lados pertenecen a la solución.*



Obtenemos la imagen de $f(x, y)=5x+4y$ en los cuatro vértices de la región factible.

$$f(0,0)=0+0=0$$
$$f(0,500)=0+4\cdot 500=2000$$
$$f(375,250)=5\cdot 375+4\cdot 250=2875$$
$$f(500,0)5\cdot 500+0=2500$$

Por el Teorema fundamental de la programación lineal podemos afirmar que, al tener una región factible acotada, el máximo y el mínimo aparecen vértices de la región factible.

Por lo tanto:

- El punto $(375,250)$ maximiza la función objetivo con una imagen igual a 2875 .
- El punto $(0,0)$ minimza la función objetivo con una imagen igual a 0 .

Ejemplos resueltos

Ejemplo 1

Las restricciones de pesca de un país obligan a una empresa a pescar como máximo 2 toneladas de merluza y 2 toneladas de rape. Además, en total, las capturas de estas dos especies no pueden pasar de las 3 toneladas.

Si el precio de la merluza es de 6€/kg y el precio del rape es de 9€/kg, ¿qué cantidades debe pescar la empresa para obtener el máximo beneficio?

Aunque no es obligatorio, es muy típico ilustrar los datos del enunciado en una tabla.

	nº toneladas	Precio por tonelada (€)	Beneficio
Tipo pescado: merluza	x	6.000	6.000 x
Tipo pescado: rape	y	9.000	9.000 y

El beneficio total es nuestra función objetivo a maximizar: beneficio de la merluza más el beneficio del rape.

$$f(x,y)=6000x+9000y$$

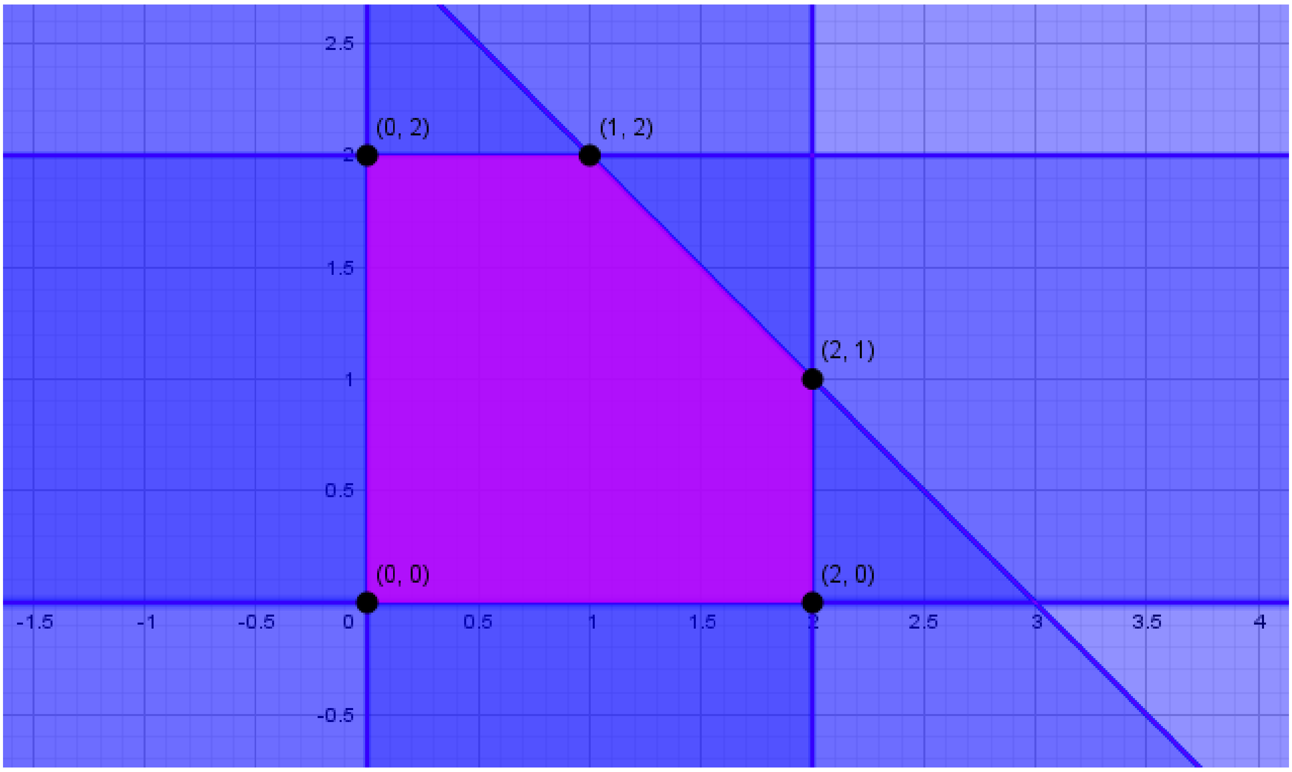
Restricciones del enunciado (leer con calma el enunciado).

- Pescar 2 toneladas de merluza como máximo → $x\leq 2$
- Pescar 2 toneladas de rape como máximo → $y\leq 2$
- La pesca total no puede superar las 3 toneladas → $x+y\leq 3$
- Además, la cantidad de pescado de cada tipo nunca puede ser negativa → $x\geq 0$, $y\geq 0$ → **Estas dos condiciones no suelen aparecer de manera explícita en este tipo de enunciados pero es muy importante aplicarlas para que la región factible sea acotada**.

En consecuencia, tenemos un sistema de cinco inecuaciones lineales de dos incógnitas.

Obtenemos la región factible del sistema. Indicando los vértices y si los lados pertenecen a la solución final.

Imagen 5*. Región factible acotada. El polígono forma un conjunto convexo. Los cinco lados pertenecen a la solución.*



Obtenemos la imagen de $f(x,y)=6000x+9000y$ en los cinco vértices de la región factible.

$$f(0,0)=0+0=0$$
$$f(2,0)=12.000$$
$$f(0,2)=18.000$$
$$f(1,2)=24.000$$
$$f(2,1)=21.000$$

Por el Teorema fundamental de la programación lineal podemos afirmar que, si la función objetivo posee un máximo en la región convexa que la delimita, el máximo aparece en al menos uno de los vértices de la región factible acotada.

Por lo tanto, el punto $(1,2)$ maximiza la función objetivo con una imagen igual a $24.000\,€$ (solución única). La empresa debe pescar 1 tonelada de merluza y 2 toneladas de rape para maximizar beneficios.

Ejemplo 2

Un atleta debe tomar por lo menos 4 unidades de vitamina A, 6 unidades de vitamina B y 23 de vitamina C cada día. Existe en el mercado dos productos P1 y P2, que en cada comprimido contienen las siguientes unidades de esas vitaminas:

- **Un comprimido de P1 contiene 3 unidades de vitamina A, 2 unidades de vitamina B y 4 unidades de vitamina C.**
- **Un comprimido de P2 contiene 4 unidades de vitamina A, 1 unidad de vitamina B y 3 unidades de vitamina C.**

Cada comprimido P1 cuesta 10 céntimos y cada comprimido P2 cuesta 5 céntimos.

¿Cuántos comprimidos de cada tipo debe tomar al día para obtener el nivel de vitaminas indicado al menor coste económico.

Las variables serán el número de comprimidos que debe tomar de cada tipo al día.

	nº comprimidos al día	Precio de cada comprimido (céntimos)	Coste
Comprimido P1	x	10	10 x
Comprimido P2	y	5	5 y

El coste total es nuestra función objetivo a minimizar.

$$f(x, y) = 10x + 5y$$

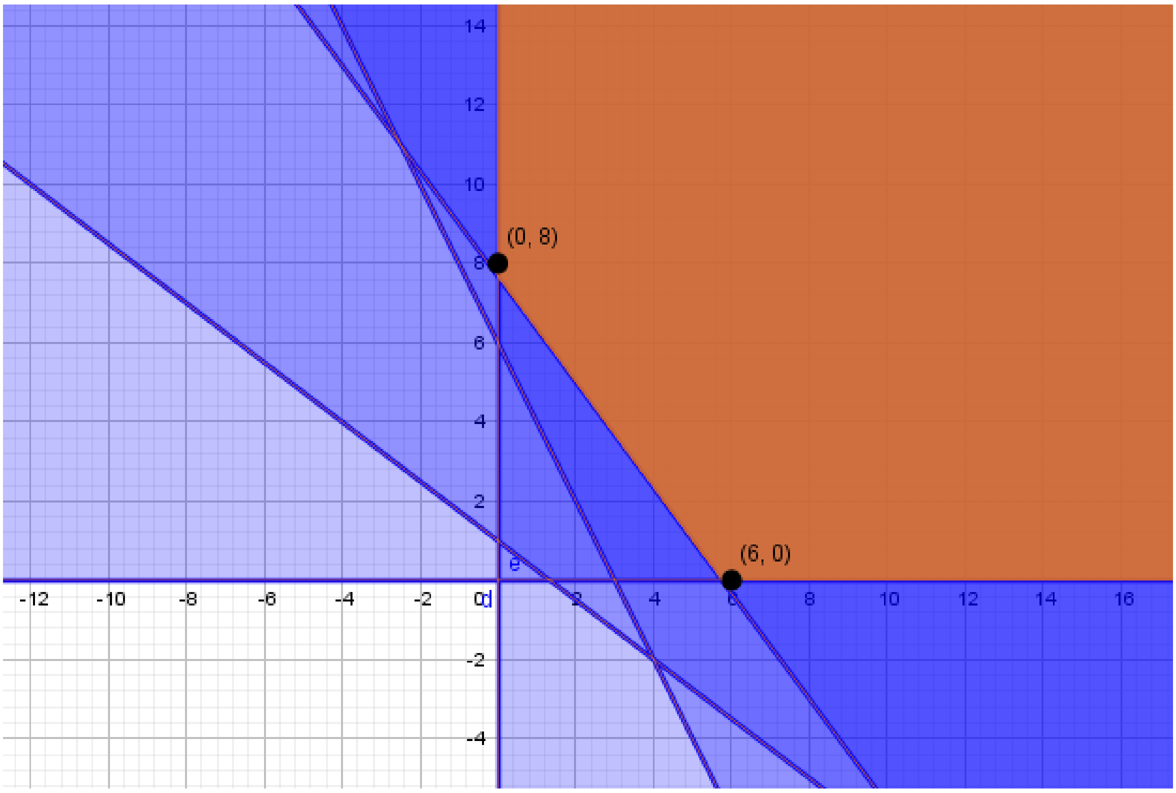
Conjunto de restricciones:

- Al menos 4 unidades de vitamina A. Como cada comprimido de P1 contiene 3 unidades de vitamina A y cada comprimido de P2 contiene 4 unidades de vitamina A → $3x + 4y \geq 4$
- Al menos 6 unidades de vitamina B. Como cada comprimido de P1 contiene 2 unidades de vitamina B y cada comprimido de P2 contiene 1 unidad de vitamina B → $2x + y \geq 6$
- Al menos 23 unidades de vitamina C. Como cada comprimido de P1 contiene 4 unidades de vitamina C y cada comprimido de P2 contiene 3 unidades de vitamina C → $4x + 3y \geq 23$
- Además, el número de comprimidos de cada tipo no puede ser negativo: → $x \geq 0$, $y \geq 0$

En consecuencia, tenemos un sistema de cinco inecuaciones lineales de dos incógnitas.

Obtenemos la región factible del sistema. Indicando los vértices y si los lados pertenecen a la solución final.

Imagen 6*. Región factible no acotada. La región factible forma un conjunto convexo. Los lados pertenecen a la solución.*



Obtenemos la imagen de $f(x,y)=10x+5y$ en los dos vértices de la región factible.

$$f(6,0)=6\cdot10+0=60$$
$$f(0,8)=0+8\cdot5=40$$

Aunque la región factible no es acotada, p**or el Teorema fundamental de la programación lineal** podemos afirmar que, si la función objetivo posee un mínimo en la región convexa que la delimita, el mínimo aparece en al menos uno de los vértices de la región factible.

El vértice que genera la imagen más pequeña es el punto $(0,8)$, que da lugar a una imagen de 40 céntimo. Como el punto $(0,8)$ pertenece a un lado vertical que crece hacia arriba hacia el infinito, tomamos otro punto de ese lado para verificar si también es mínimo. Por ejemplo, tomamos el punto $(0,10)$ $\rightarrow$ $f(0,10)=0+50$ $\rightarrow$ La imagen que genera $(0,10)$ es mayor que la imagen que genera $(0,8)$.

Solución: El atleta debe tomar 8 comprimidos tipo P2 para minimizar costes y alcanzar los niveles mínimos de vitaminas requeridos (solución única).

Ejemplo 3

Una empresa textil quiere fabricar dos tipos de camisetas, lisas y estampadas. Para fabricar una camiseta lisa necesita 70g de algodón y 20g de poliéster. Y para cada camisa estampada necesita 60g de algodón y 10 g de poliéster.

La empresa dispone para ello de 4200g de algodón y 800g de poliéster. Para que sea rentable debe fabricar al menos 10 estampadas y además, el doble de las estampadas debe ser al menos igual al número de lisas.

Sabiendo que cada camiseta lisa da un beneficio de 5 euros y cada estampada de 4 euros, ¿cuántas camisetas de cada tipo debería fabricar para obtener el máximo beneficio? ¿Cuál es ese beneficio?

Las variables serán el número de camisetas que debe fabricar.

	nº camisetas fabricadas	Beneficio por cada camiseta (€)	Beneficio
Camiseta lisa	x	5	5 x
Comiseta estampada	y	4	4 y

El beneficio total es nuestra función objetivo a maximizar.

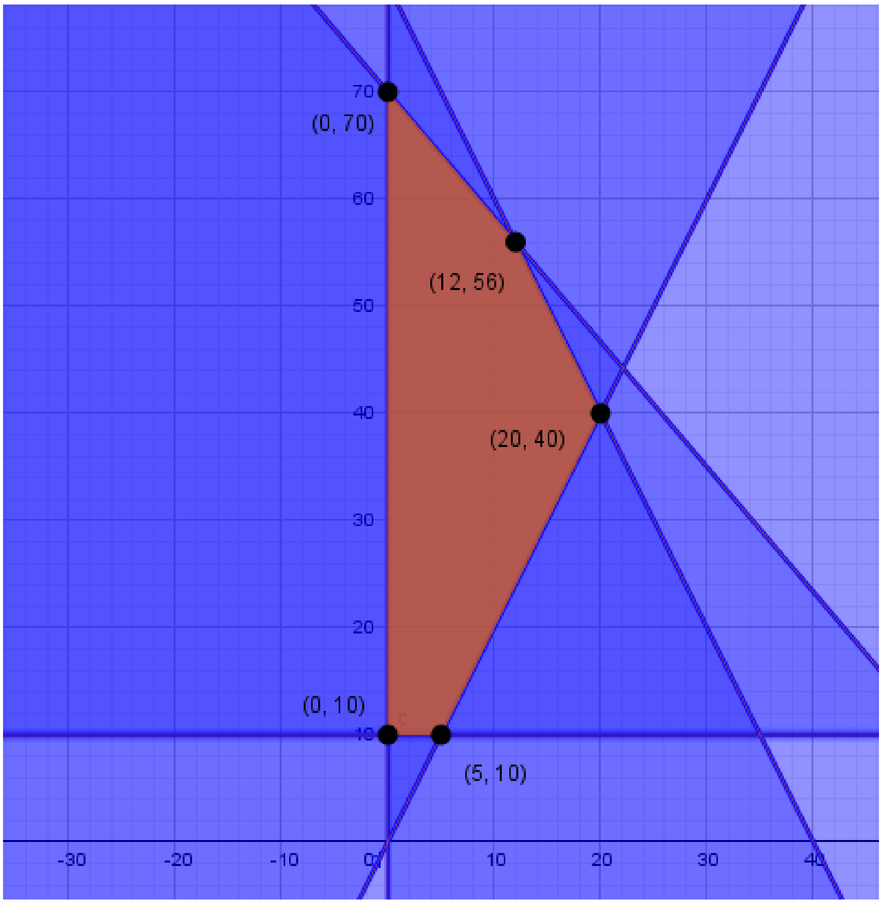
$$f(x,y)=5x+4y$$

Conjunto de restricciones:

- Cada camiseta lisa contiene 70g de algodón y cada camiseta estampada 60g de algodón. Y la cantidad máxima de algodón que posee la empresa es 4200g → $70x+60y\leq 4200$
- Cada camiseta lisa contiene 20g de poliéster y cada camiseta estampada 10g de poliéster. Y la cantidad máxima de poliéster que posee la empresa es 800g → $20x+10y\leq 800$
- Deben fabricarse al menos 10 camisetas estampadas → $y\geq 10$
- El doble de estampadas debe ser al menos igual al número de lisas → $y\geq 2x$
- Como es costumbre en estos ejercicios, el número de camisetas de cada tipo no pueden ser negativas → $x\geq 0$, $y\geq 0$

Poseemos un sistema de seis inecuaciones lineales de dos incógnitas.
Obtenemos la región factible del sistema. Indicando los vértices y si los lados pertenecen a la solución final.

***Imagen 7**. Región factible acotada. El polígono forma un conjunto convexo. Los cinco* *lados pertenecen a la solución.*



Obtenemos la imagen de $f(x, y)=5x+4y$ en los cinco vértices de la región factible.

$$
\begin{aligned}
f(5,10)&=25+40=65\\
f(0,10)&=0+40=40\\
f(0,70)&=0+280=280\\
f(20,40)&=100+160=260\\
f(12,56)&=60+224=284
\end{aligned}
$$

Por el Teorema fundamental de la programación lineal podemos afirmar que, si la función objetivo posee un máximo en la región convexa que la delimita, el máximo aparece en al menos uno de los vértices de la región factible. Al estar acotada la solución, sabemos que el problemta de programación lineal tendrá solución.

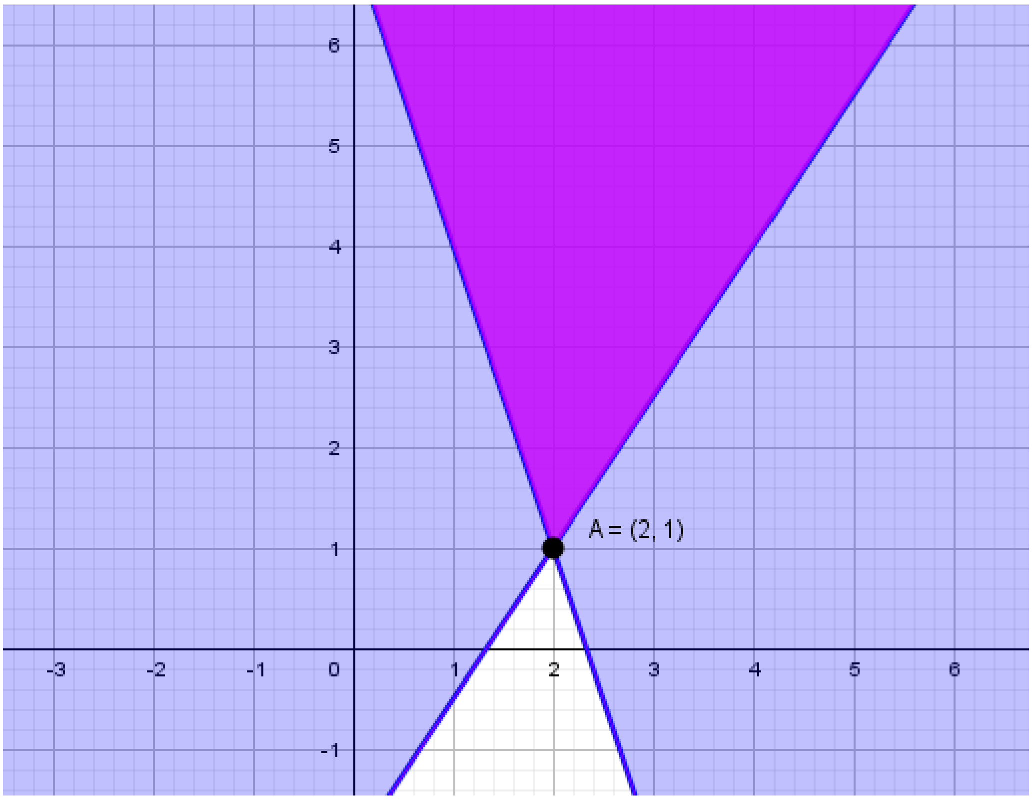
La empresa obtiene un beneficio máximo de 284€ si fabrica 12 camisetas lisas y 56 camisetas estampadas (solución única).

Ejemplo 4

Sea la región del plano limitada por las inecuaciones $3x+y\geq 7$ y $3x-2y\leq 4$. Y sea la función objetivo $f(x,y)=3x+y$. Obtener su máximo y su mínimo en la región factible.

Dibujamos la región factible.

***Imagen 8**. Región factible no acotada. Ojo, tras obtener la imagen que genera el punto A, deberemos tomar un punto de cada uno de los lados infinitos y comprobar si aumentan o disminuyen la imagen generada por A en la función objetivo.*



Obtenemos la imagen de $f(x,y)=3x+y$ en el vértice A.

$$f(2,1)=3\cdot 2+1=7$$

¿Es un máximo? ¿Es un mínimo? ¿Es la única solución? En el vértice A confluyen dos lados infinitos. Tomamos un punto de cada lado.

$$(4,4) \quad \rightarrow \quad f(4,4)=3\cdot 4+4=16$$
$$(0,7) \quad \rightarrow \quad f(0,7)=0+7=7$$

Consecuencia: todos los puntos del lado de la región factible que pasa por A y sube hacia la izquierda, minimizan a la función objetivo (infinitos mínimos).

No hay máximos, ya que los puntos del lado que pasa por A y sube hacia la derecha, van tomando imágenes cada vez más grandes (no hay máximos).

Ejemplo 5

¿Pertenecen los puntos $P(1,2)$ y $Q(2,5)$ al conjunto de soluciones del sistema de inecuaciones $\begin{Bmatrix} 2x+y>4 \\ x-2y<8 \end{Bmatrix}$?

Si no lo pide el enunciado, podemos resolver sin necesidad de dibujar la solución gráfica. Podemos comprobar, para cada punto, si cumple ambas inecuaciones.

$P(1,2) \rightarrow \begin{Bmatrix} 2\cdot 1+2>4 \rightarrow Absurdo \\ 1-2\cdot 2<8 \rightarrow Verdadero \end{Bmatrix}$ → el punto $P(1,2)$ no pertenece a la solución.

$Q(2,5) \rightarrow \begin{Bmatrix} 2\cdot 2>4 \rightarrow Absurdo \\ 1-2\cdot 2<8 \rightarrow Verdadero \end{Bmatrix}$ → el punto $Q(2,5)$ sí pertenece a la solución.

Ejemplo 6

Indica la posición de los puntos $P(1,2)$ y $Q(5,1)$ en relación a la región solución que satisface el siguiente sistema de inecuaciones $\begin{Bmatrix} x+2y\leq 12 \\ 2x+y\geq 4 \\ x-2y\leq 6 \\ x-y\geq 0 \\ x\leq 8 \end{Bmatrix}$. Si el punto es exterior, indica que desigualdades cumple.

$$P(1,2) \rightarrow \begin{Bmatrix} 1+2\cdot 2\leq 12 \rightarrow 5\leq 12 \rightarrow Verdadero \\ 2\cdot 1+2\geq 4 \rightarrow 4=4 \rightarrow Verdadero\,(cumple\ signo\,igual) \\ 1-2\cdot 2\leq 6 \rightarrow -3\leq 6 \rightarrow Verdadero \\ 1-2\geq 0 \rightarrow -1\geq 0 \rightarrow Absurdo \\ 1\leq 8 \rightarrow Verdadero \end{Bmatrix} \rightarrow P(1,2) \text{ punto exterior}$$

$$Q(5,1) \rightarrow \begin{Bmatrix} 5+2\cdot 1\leq 12 \rightarrow 12\leq 12 \rightarrow Verdadero\,(cumple\ signo\,igual) \\ 2\cdot 5+1\geq 4 \rightarrow 11\geq 4 \rightarrow Verdadero \\ 5-2\cdot 1\leq 6 \rightarrow 3\leq 6 \rightarrow Verdadero \\ 5-1\geq 0 \rightarrow 4\geq 0 \rightarrow Verdadero \\ 5\leq 8 \rightarrow Verdadero \end{Bmatrix} \rightarrow Q(5,1) \text{ cumple}$$

todas las desigualdades. Al cumplir el signo igual de $x+2y\leq 12$, el punto $Q(5,1)$ se encuentra en la frontera de la región factible, justo sobre el lado delimitado por la recta asociada a la inecuación $x+2y\leq 12$.

Ejemplo 7

Una empresa fabrica pintura de dos tipos: mate y brillante. Para ello mezcla dos productos A y B en distintas proporciones. Cada kg de pintura mate necesita 0,4kg de producto A y 0,6kg de producto B. Cada kg de pintura brillante necesita 0,2kg de producto A y 0,8kg de producto B.

La empresa posee un máximo de 200kg de producto A y un máximo de 500kg de producto B. Además, por razones comerciales, quiere frabicar al menos 200kg de pintura mate y al menos 300kg de pintura brillante.

El beneficio por kg de pintura mate es de 4€ y el beneficio por kg de pintura brillante es de 5€. ¿Qué cantidad de cada tipo de pintura debe fabricar la empresa para maximizar su beneficio? ¿Cuál será el beneficio máximo que obtendrá? ¿Con la solución óptima, sobra alguna cantidad de los productos A y B?

Las variables serán el número de kg que debe fabricar de pintura mate y brillante.

	kg	Beneficio por cada kg (€)	Beneficio
Pintura mate	x	4	4 x
Pintura brillante	y	5	5 y

El beneficio total es nuestra función objetivo a maximizar.

$$f(x,y)=4x+5y$$

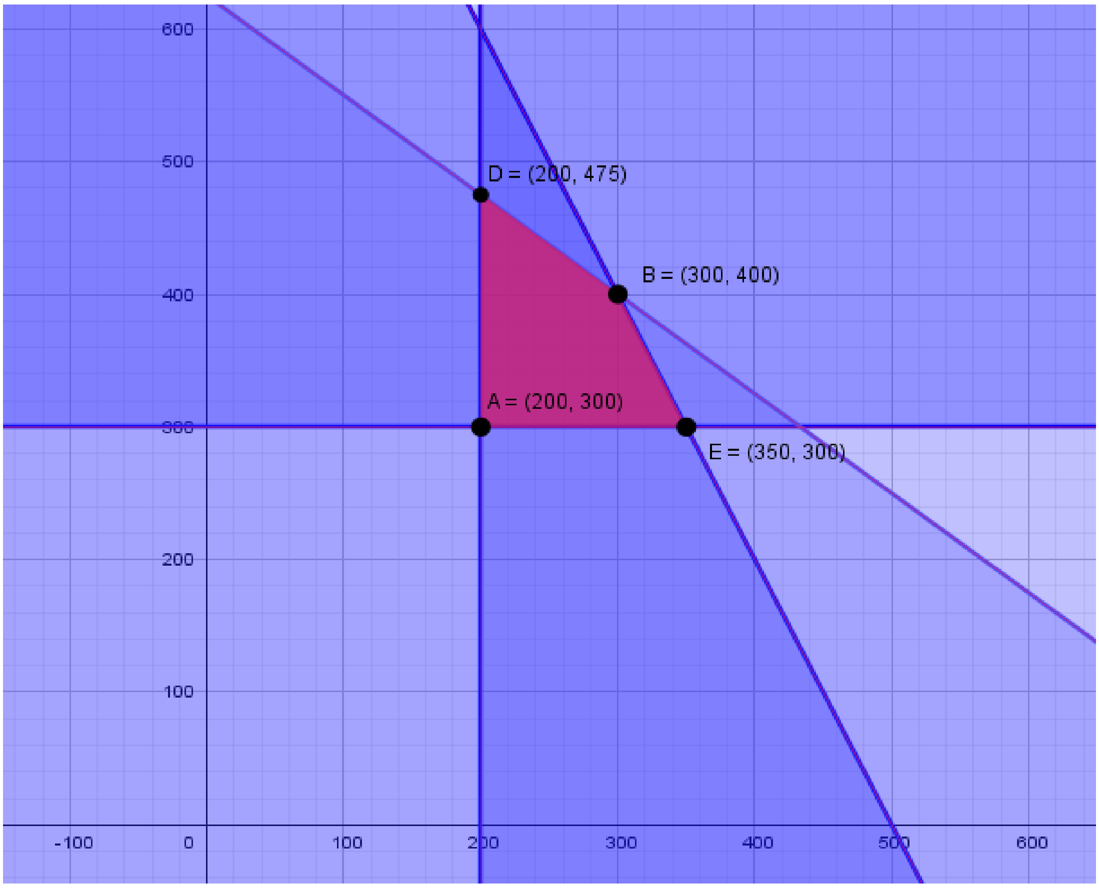
Conjunto de restricciones:

- Cada kg mate posee 0,4kg de producto A y cada kg brillante posee 0,2kg de producto A. Y la cantidad máxima de A que posee la empresa es 200kg → $0{,}4x+0{,}2y\leq 200$
- Cada kg mate posee 0,6kg de producto B y cada kg brillante posee 0,8kg de producto B. Y la cantidad máxima de B que posee la empresa es 500kg → $0{,}6x+0{,}8y\leq 500$
- Deben fabricarse al menos 200kg mate → $x\geq 200$
- Deben fabricarse al menos 300kg brillante → $y\geq 300$
- Como es costumbre en estos ejercicios, el número de kg mate y brillante no pueden ser negativos → $x\geq 0$, $y\geq 0$ → Aunque estas dos inecuaciones no aportan restricciones nuevas, ya que hemos indicado que al menos hay 200kg de mate y al menos 300kg de brillante.

Poseemos un sistema de cuatro inecuaciones lineales de dos incógnitas.

Obtenemos la región factible del sistema. Indicando los vértices y si los lados pertenecen a la solución final.

***Imagen 9**. Región factible acotada, por lo que sabemos que el problema de programación lineal tiene solución. Los lados pertenecen a la región factible.*



Obtenemos la imagen de $f(x,y)=4x+5y$ en los vértices.

$$f(200,300)=4\cdot 200+5\cdot 300=2.300$$
$$f(350,300)=4\cdot 350+5\cdot 300=2.900$$
$$f(300,400)=4\cdot 300+5\cdot 400=3.200$$
$$f(200,475)=4\cdot 200+5\cdot 475=3.175$$

El beneficio máximo es igual a $3.200€$ y se alcanza fabricando 300kg de pintura mate y 400kg de puntura brillante (solución única). Con esas condiciones óptimas:

- Se consumen $0{,}4\cdot 300+0{,}2\cdot 400=200\,kg$ de producto A → No sobra producto A.
- Se consumen $0{,}6\cdot 300+0{,}8\cdot 400=500\,kg$ de producto B → No sobra producto B.

Ejemplo 8

Una empresa tiene dos plantas de producción P1 y P2 de cierto artículo que vende en tres ciudades C1, C2 y C3. En la planta P1 produce 5.000 unidades y en P2 produce 7.000 unidades.

El total de 12.000 unidades fabricadas las vende así: 3.500 en la ciudad C1, 4.000 en C2 y 4.500 en C3. Los costes de transporte, en euros por unidad de producto, desde las plantas de producción a los centros de ventas son los siguientes:

	a C1	a C2	a C3
Desde P1	30	25	35
Desde P2	22,5	37,5	40

Determina cuántos artículos debe enviar la empresa desde cada planta a cada ciudad para que los costes de transporte sean mínimos.

Las variables serán el número de artículos que debemos enviar desde la planta P1 a cada ciudad, ya que la cantidad que se manda desde P2 depende de la primera planta. Fíjate bien en la siguiente tabla, ya que **se razona de forma diferente a los ejercicios anteriormente resueltos sobre problemas de contexto porque el coste se coloca en forma de fila y no en forma de columna (esto ocurre en los problemas de distribución)**.

Destino ----------- **Origen**	**nº artículos a C1** (los que salen desde P2 dependen de los que ya han salido desde P1, porque a C1 deben llegar 3.500)	**nº artículos a C2** (los que salen desde P2 dependen de los que ya han salido desde P1, porque a C2 deben llegar 4.000)	**nº artículos a C3** (los que salen desde P2 dependen de los que ya han salido desde P1, porque a C3 deben llegar 4.500)
P1 genera 5.000 unidades	x	y	5.000 – (x + y) → 5.000 – x – y Fíjate que la suma x + y + 5.000 – x – y da como resultado los 5.000 que genera P1
P2 genera 7.000 unidades	3.500 - x	4.000 - y	4.500 - [5.000 – (x + y)] → -500 + x + y Fíjate que 3.500 – x + 4.000 – y – 500 + x +y da como resultado los 7.000 que genera P2
Coste	30 x + 22,5(3.500 - x)	25 y + 37,5 (4.000 - y)	35[5.000 – x - y] + 40[-500 + x + y]

El coste total es nuestra función objetivo a minimizar. Debemos sumar el coste del envío a cada una de las ciudades.

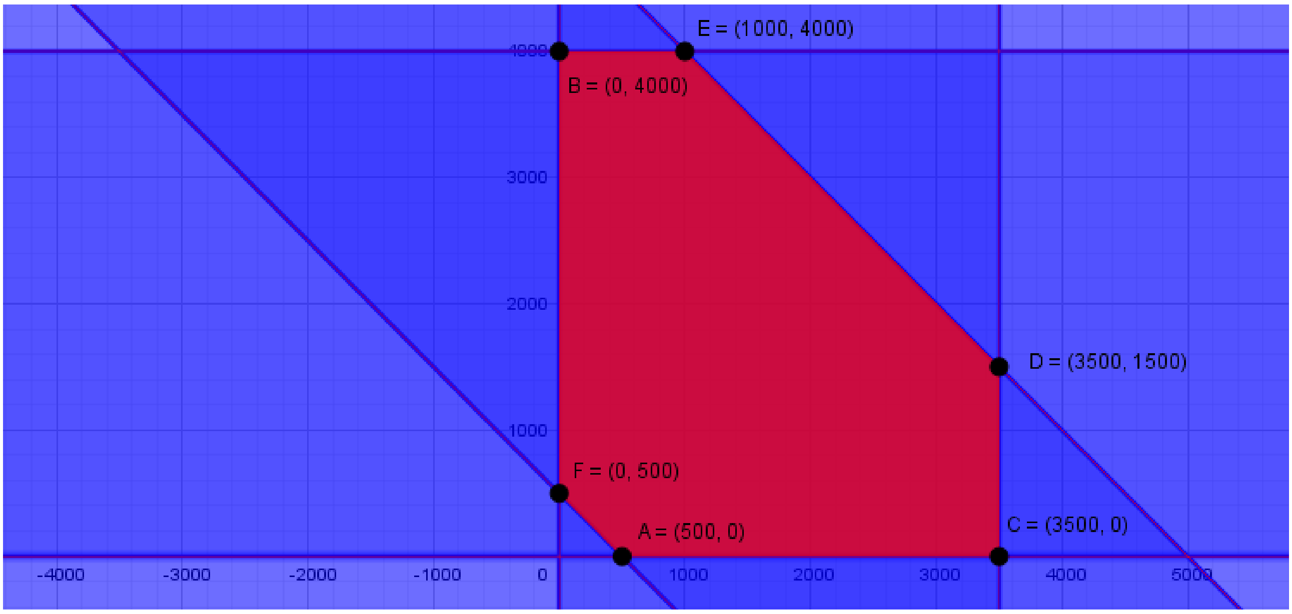
$$f(x,y)=30x+78.750-22{,}5x+25y+150.000-37{,}5y+175.000-35x-35y+80.000+40x+40y$$
$$f(x,y)=12{,}5x-7{,}5y+83.750$$

Conjunto de restricciones:

- Las variables no pueden ser negativas. Es decir, P1 envía a C1 y a C2 cantidades no negativas → $x\geq 0$, $y\geq 0$
- P1 envía a C3 una cantidad no negativa → $5.000-x-y\geq 0$ → $x+y\leq 5.000$
- P2 envía a C1 una cantidad no negativa → $3.500-x\geq 0$ → $x\leq 3.500$
- P2 envía a C2 una cantidad no negativa → $4.000-y\geq 0$ → $y\leq 4.000$
- P2 envía a C3 una cantidad no negativa → $-500+x+y\geq 0$ → $x+y\geq 500$

Poseemos un sistema de seis inecuaciones lineales de dos incógnitas.
Obtenemos la región factible del sistema. Indicando los vértices y si los lados pertenecen a la solución final.

Imagen 10*. Región factible acotada, por lo que sabemos que el problema de programación lineal tiene solución. Los lados del polígono pertenecen a la solución.*



Obtenemos la imagen de $f(x,y)=12{,}5x-7{,}5y+83.750$ en los vértices.

$$f(500{,}0)=90.000$$
$$f(0{,}500)=4\cdot 350+5\cdot 300=80.000$$

$f(3.500,0)=127.500$
$f(3.500,1.500)=116.250$
$f(1.000,4.000)=66.250$
$f(0,4.000)=53.750$

El coste mínimo es de 53.750€ y se consigue en el vértice $(0,4.000)$, tal y com refleja la siguiente tabla.

Destino **-----------** **Origen**	**C1 (3.500)**	**C2 (4.000)**	**C3 (4.500)**
P1 (5.000)	0	4.000	1.000
P2 (7.000)	3.500	0	3.5000

Más problemas para practicar

La web del IES Ayala ofrece soluciones detalladas de los modelos de Selectividad de Mates CCSS de los últimos años, donde fácilmente encontraremos problemas de programación lineal para practicar.

https://www.iesayala.com/selectividadmatematicas/ficheros/andaluciaccss.html

Algunas consideraciones finales sobre programación lineal

- Si aparece un único punto óptimo, hablaremos de región factible con solución única.
- Si los puntos óptimos aparecen a lo largo de todo un segmento entre dos vértices, tendremos región factible con infinitas soluciones para el problema de optimización.
- Cuando no existe límite máximo al valor de la imagen de la función objetivo, y se puede hacer tan grande como se desee, diremos que no hay máximo. Y si la imagen se puede hacer tan pequeña como se desee, diremos que no hay mínimo.
- Si no existe una región factible sobre la que aplicar una función objetivo, diremos que la región es no factible porque las inecuaciones generan restricciones inconsistentes (es imposible cumplir todas las condiciones).
- No olvidar las dos condiciones $x \geq 0$, $y \geq 0$ si las variables lo requieren. No suele decirse de manera explícita en el enunciado de los problemas de contexto.
- Si me piden comprobar si un punto $P(x_{0,} y_0)$ pertenece a una región factible, no se hace a ojo. Se comprueba que el punto cumple una a una todas las inecuaciones.
- Un punto $P(x_{0,} y_0)$ puede ser interior a una región factible, o bien un punto en la frontera o bien un punto exterior. Es exterior cuando, al menos, no cumple una de las inecuaciones. Está en la frontera cuando cumple el signo igual que aparece en al menos una de las inecuaciones no estrictas. Y es interior cuando cumple todas las inecuaciones de manera estricta (sin el signo igual).
- La forma general de la función objetivo es $f(x,y)=ax+by+c$. En muchos ejercicios tipo Selectividad el término independiente c es 0. Pero podría ser cualquier valor real.