

Problemas – Tema 9

Enunciados de problemas sobre geometría tridimensional

Hoja 1

1. Dada la recta $r: \begin{cases} 4x - 3y + 4z = -1 \\ 3x - 2y + z = -3 \end{cases}$ y el plano $\Pi: 2x - y + az = 0$.

- Calcular a para que la recta y el plano sean paralelos.
- Obtener un plano perpendicular a la recta que pase por el origen de coordenadas.

2. Calcular las coordenadas de un punto de la recta $r: \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{2}$ que equidiste de los planos $\Pi_1: 3x + 4y - 1 = 0$ y $\Pi_2: 4x - 3y + 9 = 0$.

3. a) Encuentra la ecuación continua de la recta r que pasa por el punto $P(2, 3, -1)$ y es paralela a los planos $\Pi_1: 2x - y + 3z - 1 = 0$ y $\Pi_2: x + y - 2z + 3 = 0$.

b) Encuentra el punto $Q \in r$ que está en el plano $x = 0$.

4. Encuentra la ecuación continua de la recta r que pasa por el punto $P(-1, 5, 6)$ y corta a las rectas $s: \begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ 3x + y - z - 8 = 0 \end{cases}$ y $t: \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{2}$.

5. a) Para qué valor del parámetro a la recta $r: \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x - 2y + z = 0 \end{cases}$ es perpendicular al plano $\Pi: -6x + ay + 2z = 0$.

b) Demuestre que si $a = -8$ la recta r corta al plano Π en un punto. Calcular dicho punto de corte.

6. Dos de los tres vértices de un triángulo son los puntos $A(1, 1, 1)$ y $B(1, 1, 3)$. El tercer vértice C está en la recta r que pasa por los puntos $P(-1, 0, 2)$ y $Q(0, 0, 2)$.

a) Determinar la ecuación de la recta r .

b) Calcular el punto C para que el área del triángulo sea igual a $\sqrt{15}u^2$.

Hoja 2

1. Dados el plano $\Pi: 2x - y = 2$ y la recta $r: \begin{cases} x=1 \\ y-2z=2 \end{cases}$ se pide:

- Estudiar la posición relativa de la recta y el plano.
- Determinar el plano que contiene a la recta r y es perpendicular a Π .
- Determinar la recta que pasa por $A(-2, 1, 0)$, corta a r y es paralela a Π .

2. Dados el punto $P(1, 0, 1)$, el plano $\Pi: x + 5y - 6z = 1$ y la recta $r: \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$ se pide:

- Calcular el punto P' simétrico a P respecto de Π .
- Hallar la distancia de P a r .

3. Halla un punto P de la recta $r: \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$ que no sea coplanario con los puntos $A(2, 1, 4)$, $B(1, 2, 2)$ y $C(1, 1, 2)$.

4. Consideremos los puntos $A(2, 6, -3)$ y $B(3, 3, -2)$.

- Halla la ecuación de la recta que contiene a ambos puntos.
- Determina una ecuación para el plano equidistante de ambos puntos.

5. Determina el valor de a para que la recta $r: \begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ 2x + y + z = 3 \end{cases}$ sea paralela al plano $\Pi: x - ay + 10z = -3$.

6. Dados los puntos $A(-1, 0, 3)$, $B(2, 4, 1)$ y $C(-4, 3, 1)$:

- Estudiar si los tres puntos están alineados.
- Hallar la ecuación de la recta paralela al segmento \overline{AB} y que pasa por C . Expresar la recta como intersección de dos planos.

7. Calcula la ecuación continua de la recta paralela al plano $\Pi: 2x - 2y + 5z = 3$ y perpendicular a la recta $r: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{3}$ que pasa por el punto $P(-1, 2, 0)$.

Hoja 3

1. Determina el punto (o los puntos) de la recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{2}$ que equidistan de los planos

$$\Pi_1: x+y+z+3=0 \quad \text{y} \quad \Pi_2: \begin{cases} x=-3+\lambda \\ y=-\lambda+\mu \\ z=-6+\mu \end{cases} .$$

2. Define el producto vectorial de dos vectores. Dados los vectores $\vec{u}=(2,2,0)$ y $\vec{v}=(1,1,-1)$, calcula los vectores unitarios y perpendiculares a los dos vectores.

3. Calcula el valor de a para que la recta $r: \frac{x}{2} = \frac{y-2}{6} = \frac{z-2}{-4}$ no corte al plano $\Pi: 5x+ay+4z=5$. Para ese valor de a calcula la distancia de la recta al plano.

4. a) Calcula el punto simétrico de $P(-2,0,2)$ respecto al plano $\Pi: 3x+2y+z-3=0$.

b) Sea r la recta perpendicular al plano $\Pi: 3x+2y+z-3=0$ y que pasa por el punto $P(-2,0,2)$. Sea la recta $s: \begin{cases} 2x-y-3z=0 \\ x-z-10=0 \end{cases}$. Estudia la posición relativa de ambas rectas. Calcula la ecuación del plano paralelo a s que contiene a r .

5. Dado el plano Π_1 de ecuación $z=0$, escriba la ecuación de los planos Π_2 y Π_3 tales que los tres planos se corten dos a dos pero no exista ningún punto común a los tres.

6. Considere las rectas $r: \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x+y=1 \\ x-y=1 \end{cases}$.

a) Obtener un vector director de la recta s .

b) Obtener el plano que contiene a r y es paralelo a s .

c) Obtener el plano que contiene a r y es perpendicular a s .

Hoja 4

1. Sea el triángulo de vértices $A(1,2,-2)$, $B(0,-3,1)$ y $C(-1,0,0)$ y los planos $\Pi_1: x+y+z+1=0$ y $\Pi_2: \begin{cases} x=-\alpha+\beta+1 \\ y=\alpha-2\beta \\ z=\alpha+\beta \end{cases}$.

- Obtener la posición relativa de Π_1 y del plano que contiene al triángulo.
- Obtener un vector \vec{n}_1 perpendicular al plano Π_1 y un vector \vec{n}_2 perpendicular al plano Π_2 . Obtener el coseno del ángulo formado por ambos vectores.
- Obtener las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de ambos planos.

2. Sean los puntos $A(-1,0,2)$ y las rectas $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = z-2$, $s: \begin{cases} x=-1-2\lambda \\ y=1+3\lambda \\ z=1+\lambda \end{cases}$.

- Obtener la ecuación del plano que pasa por A y contiene a la recta r .
- Obtener la ecuación del plano que pasa por A y es perpendicular a la recta s .
- Obtener la recta intersección de los planos obtenidos en los dos apartados anteriores.

3. Sean las rectas $r: \frac{x-2}{3} = y = \frac{z+1}{4}$ y $s: (x, y, z) = (1+2\alpha, 3-\alpha, 4+3\alpha)$.

- Comprobar que los puntos medios de los segmentos que tienen un extremo situado sobre la recta r y el otro punto situado sobre la recta s forman un plano.
- Hallar la ecuación general del plano del apartado anterior.

4. Sea el punto $A(1,2,3)$.

- Calcular el punto simétrico del punto A respecto de la recta de ecuación $r: (x, y, z) = (3+\lambda, 1, 3-\lambda)$.
- Calcular el punto simétrico del punto A respecto del plano $\Pi: x+y+z=3$.

5. Calcular la recta contenida en el plano $\Pi_1: x+y+z=3$ paralela al plano $\Pi_2: x=0$ y que pasa por el punto simétrico de $B(-1,1,1)$ respecto de Π_2 .

6. Sea el plano que pasa por los puntos $A(1,-1,1)$, $B(2,3,2)$, $C(3,1,0)$ y sea la recta dada por $r: \frac{x-7}{2} = \frac{y+6}{-1} = \frac{z+3}{2}$.

- Calcular el ángulo que forma la recta y el plano.
- Calcular los puntos de la recta que distan 6 unidades del plano.

Hoja 5

1. Dado el plano $\Pi: x - y = 4$ y la recta $r: \begin{cases} x + z = 1 \\ 2x + y + az = 0 \end{cases}$, con $a \in \mathbb{R}$. Se pide:

- Estudiar si existe algún valor del parámetro a para que la recta y el plano sean paralelos.
- Estudiar si existe algún valor del parámetro a para que la recta y el plano se corten perpendicularmente.

2. a) Halla $a \in \mathbb{R}$ para que las rectas $r: \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ -x + y - 3z = 2 \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x + y = 0 \\ 3x + 2y + z = a \end{cases}$ se corten en un punto.

b) Para dicho valor de a obtener la ecuación implícita de un plano que contenga a ambas rectas.

3. Sea la recta $r: \begin{cases} 3x - 2y - 11 = 0 \\ 2x - y - z - 5 = 0 \end{cases}$ y los puntos $A(0, 1, 1)$ y $B(1, 2, 1)$.

- Halla un punto de la recta que equidiste de los puntos A y B .
- Calcula la ecuación general del plano que contiene a la recta r y al punto A .
- Determina la distancia del punto B al plano del apartado anterior.

4. Sea el plano $\Pi: ax + 2y - 4z - 23 = 0$ y la recta $r: \frac{x-3}{4} = \frac{y-1}{-4} = z+3$.

- Halla el valor de a para que la recta esté contenida en el plano.
- ¿Existe algún valor de a para el que la recta r sea perpendicular al plano Π ?
- Para $a=1$ calcula la ecuación general del plano Π_1 que es perpendicular al plano Π y que contiene a la recta r .

5. Se consideran los puntos en el espacio $A(0, -1, 2)$, $B(2, 2, 3)$ y $C(0, 0, 3)$.

- Halla la ecuación general o implícita del plano que pasa por los tres puntos.
- Obtener una recta perpendicular al plano del apartado anterior y que pase por A .

6. Considera el punto $P(-1, 0, 1)$ y el plano $\Pi: x - y + z + 2 = 0$. Calcule:

- Las ecuaciones de una recta que pase por el punto P y sea perpendicular al plano Π .
- La distancia del punto P al plano Π .

Hoja 6

1. Sean las rectas $r: \begin{cases} 2x - 4z = 2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ y $s: \frac{x}{2} = \frac{y+2}{a} = \frac{z-\frac{1}{2}}{1}$.

- Determina la posición relativa de dichas rectas, según los diferentes valores de a .
- Si $a=2$ determina el ángulo entre ambas rectas.

2. Dados el punto $P(1, -1, 0)$ y la recta $s: \begin{cases} -2x + z - 1 = 0 \\ 3x - y - 3 = 0 \end{cases}$.

- Determine la ecuación general del plano $Ax + By + Cz + D = 0$ que contiene al punto P y la recta s .
- Determine el ángulo que forman el plano $\Pi: 2x + y - z + 1 = 0$ y la recta s .

3. Sea r la recta definida por $r: \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$.

- Determina la ecuación general del plano que contiene a r y pasa por el origen de coordenadas.
- Halla las ecuaciones paramétricas del plano que corta perpendicular a r en el punto $(1, 1, 0)$.

4. Sea la recta r que pasa por los puntos $A(1, 0, -1)$ y $B(-1, 1, 0)$.

- Halla la ecuación de la recta s paralela a r que pasa por $C(-2, 3, 2)$.
- Calcula la distancia de r y s .

Hoja 7

1. Sea la recta r que pasa por el punto $(1,0,0)$ y tiene como vector director $(a, 2a, 1)$ y sea la recta s dada por $s: \begin{cases} -2x+y=-2 \\ -ax+z=0 \end{cases}$.

a) Calcula los valores de a para que las rectas r y s sean paralelas.

b) Para $a=1$ calcula la distancia entre las rectas r y s .

2. Sean los puntos $P(2, 3, 1)$ y $Q(0, 1, 1)$.

a) Halla la ecuación del plano Π respecto al cual ambos puntos son simétricos.

b) Calcula la distancia de P a Π .

3. a) ¿Pueden existir vectores \vec{u} y \vec{v} tales que $|\vec{u}|=2$, $|\vec{v}|=3$ y $\vec{u} \cdot \vec{v}=8$? Justifica la respuesta.

b) Determina todos los vectores $\vec{u}=(a, 0, b)$ que tengan módulo 8 y sean perpendiculares a la recta $r: \begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y+z-2=0 \end{cases}$.

4. Dadas las rectas $r: \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{1}$ y $s: \begin{cases} x=-\lambda \\ y=1+2\lambda \\ z=-2+2\lambda \end{cases}$.

a) Determine su posición relativa.

b) Calcule la distancia del punto $P(2, 3, 1)$ a la recta s .

5. Sea el punto $P(-1, 2, 0)$ y el plano $\Pi: 2x-3y+z=8$. Calcula:

a) Las ecuaciones de una recta que pase por el punto y sea perpendicular al plano.

b) La distancia d del punto al plano.

c) La ecuación de otro plano, paralelo a Π y distinto de él, que diste de P la misma distancia d calculada en el apartado anterior.

6. Sean los puntos $A(1, -1, 1)$ y $B(2, 2, 2)$.

a) Hallar el punto medio de A y B .

b) Obtener el plano respecto del cual ambos puntos son puntos simétricos.

Hoja 8

1. Los puntos $A(1,3,1)$ y $B(2,1,3)$ son dos vértices consecutivos de un cuadrado. Los otros dos vértices del cuadrado pertenecen a una recta r que pasa por el punto $P(2,7,0)$.

- Calcula la ecuación de la recta r .
- Determina la ecuación general del plano Π que contiene al cuadrado.
- Calcula las coordenadas de los otros dos vértices del cuadrado.

2. Sea la recta $r: \frac{x-5}{-1} = y-2 = z$ y la recta s que pasa por los puntos $A(1,6,6)$ y $B(4,c,5)$.

- Determina el valor del parámetro c para que las rectas r y s se corten. Halla el punto de corte P .
- Calcula la ecuación general del plano Π que contiene a las dos rectas r y s .
- Halla el coseno del ángulo que forman las rectas r y s .

3. a) Estudia la posición relativa del plano $\Pi: x-y-z=a$ y la recta $r: \begin{cases} 2x+y+az=0 \\ x-2y=0 \end{cases}$ en función del parámetro a .

- Calcula la distancia entre el plano y la recta en función del parámetro a .

4. a) Estudia la posición relativa de las rectas $r: \begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+y-2z=1 \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x-z=0 \\ x+2y-z=12 \end{cases}$.

- Calcula la distancia entre ambas rectas.

5. Dado el punto $P(1,1,3)$ y la recta $r: \begin{cases} 2x-y-2z+3=0 \\ x-y+4=0 \end{cases}$. Encuentra la ecuación general del plano Π perpendicular a la recta y que cumple $d(P, \Pi) = 3$.

6. Tres vértices consecutivos de un paralelogramo son $A=(1,3,-4)$, $B=(2,6,7)$ y $C=(5,-1,2)$.

- Calcula el área del paralelogramo.
- Determina el cuarto vértice D .

7. Sea el punto $P(1,0,-1)$, el plano $\Pi: 2x-y+z+1=0$ y la recta $r: \begin{cases} -2x+y-1=0 \\ 3x-z-3=0 \end{cases}$.

- Determinar el plano que pasa por P , es paralelo a la recta r y perpendicular al plano Π .
- Hallar el ángulo entre r y Π .

Hoja 9

1. Sea el punto $P(1,0,2)$ y la recta $r: \begin{cases} 2x - y - 4 = 0 \\ y + 2z - 8 = 0 \end{cases}$.

- Calcula la ecuación del plano que pasa por el punto y es perpendicular a la recta.
- Calcula el punto simétrico del punto respecto de la recta.

2. De un paralelogramo de vértices consecutivos $A(2,-1,0)$, $B(-2,1,0)$ y $C(0,1,2)$, calcula:

- La ecuación de la recta que pasa por el centro del paralelogramo y es perpendicular al plano que lo contiene.
- El área del paralelogramo.
- El cuarto vértice D .

3. Sean los planos $\Pi_1: x+y=1$, $\Pi_2: ay+z=0$, $\Pi_3: x+(1+a)y+az=a+1$.

- Cuánto debe valer a para que no tengan ningún punto en común?
- Para $a=0$ determina la posición relativa de los planos.

4. Sea la recta $r: \begin{cases} 3x+2y=0 \\ 3x+z=0 \end{cases}$.

- Determina el plano perpendicular a la recta que pasa por el punto $P(1,1,1)$.
- Halla los puntos de la recta cuya distancia al origen sea de 4 unidades.

5. Sea la recta $r: \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=\lambda-2 \end{cases}$ y la recta $s: \begin{cases} x=\mu \\ y=\mu-1 \\ z=-1 \end{cases}$. Hallar la ecuación de la recta perpendicular común a ambas rectas.

6. Sea el punto $P(1,0,0)$, la recta $r: x-3=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{-2}$ y la recta $s: (x,y,z)=(1,1,0)+\lambda(-1,2,0)$.

- Estudia la posición relativa de ambas rectas.
- Halla la ecuación del plano que pasando por P es paralelo a r y s .

Hoja 10

1. Sea el punto $A(1, -2, 1)$ y la recta $r: \begin{cases} x+y=2 \\ 2x+y+z=7 \end{cases}$.

- Halla la ecuación del plano perpendicular a la recta que pasa por A .
- Calcula la distancia del punto A a la recta r .

2. Sea la recta $r: mx=y=z+2$ con $m \neq 0$, y la recta $s: \frac{x-4}{4} = y-1 = \frac{z}{2}$.

- Halla el valor de m para que las rectas sean perpendiculares.
- ¿Existe algún valor de m para el que las rectas sean paralelas?

3. Se sabe que las rectas $r: \begin{cases} x=1+t \\ y=-1-t \\ z=b+t \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x-y+z=3 \\ 6x+2z=2 \end{cases}$ están contenidas en un mismo plano.

- Calcula b .
- Halla la ecuación del plano que contiene a ambas rectas.

4. Sea el punto $A(0, -3, -1)$, el plano $\Pi: 2x-2y+3z=0$ y la recta $r: x+3=y=\frac{z-3}{2}$.

- Determina la ecuación del plano que pasa por A y contiene a r .
- Determina la ecuación de la recta que pasa por A , es paralela a Π y corta a r .

5. Sean los planos $\Pi_1: x+y+z=1$, $\Pi_2: x-y+z=2$, $\Pi_3: 3x+y+3z=5$.

- ¿Se cortan Π_1 y Π_2 ?
- ¿Hay algún punto que pertenezca a los tres planos?

6. Determina todos los puntos del plano $\Pi: 2x-y+2z-1=0$ que equidistan de los puntos $A(3, 0, -2)$ y $B(1, 2, 0)$.

7. Sea el plano $2x+y+2z-4=0$.

- Halla el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte del plano con los ejes de coordenadas.
- Calcula la distancia del origen al plano dado.