

Problemas – Tema 8

Enunciados de problemas sobre determinantes

Hoja 1

1. Calcula los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 8 & 4 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 6 & -9 \end{vmatrix}$

2. Calcula los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 7 & 13 & 0 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 7 & 11 & 13 \end{vmatrix}$

3. Calcula los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -6 \\ 5 & 7 & -9 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -6 \\ 14 & 19 & -24 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 30 & 20 & 10 \end{vmatrix}$

4. Siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula:

a) $|A|$ b) $|B|$ c) $|A \cdot B|$ d) $|A| \cdot |B|$

5. Calcula los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & \sqrt{2} & -1 \\ -1 & 2 & -\sqrt{2} \end{vmatrix}$

Hoja 2

1. Calcula sin aplicar la regla de Sarrus (usa propiedades de los determinantes) el valor del determinante

siguiente:

$$\begin{vmatrix} yz & \frac{1}{x} & x \\ xz & \frac{1}{y} & y \\ xy & \frac{1}{z} & z \end{vmatrix}$$

2. Usa propiedades de los determinantes para demostrar que el siguiente determinante es múltiplo de 13:

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 9 \\ 1 & 9 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

3. Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 25$ hallar $\begin{vmatrix} 2a & 2c & 2b \\ 2g & 2i & 2h \\ 2d & 2f & 2e \end{vmatrix}$

4. Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5$ hallar $\begin{vmatrix} \frac{a}{3} + 2b & 4b & 6c + a \\ \frac{d}{3} + 2e & 4e & 6f + d \\ \frac{g}{3} + 2h & 4h & 6i + g \end{vmatrix}$

5. Si A es una matriz cuadrada de orden 4 y $|A|=2$, hallar $|((3A))^4|$

6. Resolver las ecuaciones:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & x & \frac{1}{3} \\ 0 & 3 & x \end{vmatrix} = 0$

b) $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 5 & 25 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 0$

Hoja 3

1. Resolver las ecuaciones:

$$a) \begin{vmatrix} x-a-b & a & b \\ c & x-b-c & b \\ c & a & x-a-c \end{vmatrix} = 0$$

$$b) \begin{vmatrix} x+a & b & c \\ a & x+b & c \\ a & b & x+c \end{vmatrix} = 0$$

2. Demostrar las siguientes igualdades:

$$a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ac & ab \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(b-c)$$

$$b) \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$$

3. Demostrar la siguiente igualdad:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos(a) & \cos(2a) \\ \cos(a) & \cos(2a) & \cos(3a) \\ \cos(2a) & \cos(3a) & \cos(4a) \end{vmatrix} = 0$$

4. Demostrar:

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

5. Demostrar:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x+3 & 3y & 3z+2 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Hoja 4

1. Determina, aplicando determinantes, si las siguientes matrices admiten inversa.

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

2. Determina, aplicando determinantes, para qué valores de a no existe inversa.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ a & a & 3 \\ 4 & 1 & -a \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ a & 1 & a \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 4 & a & 4 \\ 0 & a & 3 \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$

3. Sea A una matriz cuadrada de orden 4 con determinante $|A|=2$. Hallar:

a) $|3A^{-1}|$

b) $|{(3A)^{-1}}|$

4. Halla el rango de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 6 & 7 \\ 3 & -1 & -2 & -3 \\ 5 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & -5 & 2 \\ 5 & -3 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & -7 & -12 & 0 \\ 1 & 5 & 7 & 12 & 0 \end{pmatrix}$

Hoja 5

1. Halla el rango de las siguientes matrices:

$$a) C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 4 \\ -2 & -4 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 10 & -3 & 11 \\ -2 & -4 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b) C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 4 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones por la regla de Cramer:

$$a) \begin{cases} x - y - 2z = -1 \\ 2x - 3y + 4z = 4 \\ 5x - y + 3z = 16 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ -x + y - 2z = 1 \\ 2x - 3y + z = 2 \end{cases}$$

3. Discutir la existencia de solución de los siguientes sistemas según el parámetro k y resolver cuando sea posible:

$$a) \begin{cases} 2x + y + kz = 4 \\ x + z = 2 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} kx + y + z = 0 \\ x + ky = 0 \\ 2x + kz = 0 \end{cases}$$

4. Discutir la existencia de solución de los siguientes sistemas según el parámetro k y resolver cuando sea posible:

$$a) \begin{cases} x + y + z = k \\ x + (1+k)y + z = 2k \\ x + y + (1+k)z = 0 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} (k+1)x + y + z = k+1 \\ x + (k+1)y + z = k+3 \\ x + y + (k+1)z = -2k-4 \end{cases}$$

Hoja 6

1. Discutir la existencia de solución de los siguientes sistemas según el parámetro k y resolver cuando sea posible:

$$a) \begin{cases} 2y - z = k \\ 3x - 2z = 11 \\ y + z = 6 \\ 2x + y - 4z = k \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} (k+1)x + y + z = k^2 + 3k \\ x + (k+1)y + z = k^3 + 3k^2 \\ x + y + (k+1)z = k^4 + 3k^3 \end{cases}$$

2. Estudiar la existencia de solución de los siguientes sistemas según los parámetros a y b .

$$a) \begin{cases} 2x + y = a \\ 4x + 2y = 1 + b \\ 5x + 3y = 2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} -x + 2y = a \\ 2x - 4y = b \\ -3x + 6y = 6 \end{cases}$$

3. Estudiar la existencia de solución de los siguientes sistemas según los parámetros a y b .

$$a) \begin{cases} 2x + y = a \\ 4x + 2y = 1 + b \\ 5x + 3y = 2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + ay + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases}$$

4. Elimina los parámetros de las siguientes ecuaciones:

$$a) \begin{cases} x_1 = 1 + a + b \\ x_2 = -a + 2b \\ x_3 = 2 + 2a + 8b \\ x_4 = -1 + a \\ x_5 = 3 - b \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x_1 = a + b \\ x_2 = b + c \\ x_3 = a + c \\ x_4 = 2a - 3c \\ x_5 = a + b + c \end{cases}$$

Hoja 7

1. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Calcula:

- a) $|A^{-1}|$
- b) $|((5A)^{-1})|$
- c) $|5A|$

2. a) Determina el rango de $A = \begin{pmatrix} a & -a & 6 \\ 2 & -2 & 4 \\ a+2 & -5 & -10 \end{pmatrix}$ según el valor de a .

b) Encontrar una matriz B , de orden 2×2 , que verifique la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Resolver la siguiente ecuación (obtener valor de x que satisface la igualdad):

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 5 & 25 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

4. Sea el sistema $\begin{cases} 2x + y + az = -1 \\ -x + ay - z = 2 \\ 2ax - 2y + a^2z = 2 \end{cases}$

- a) Discute las soluciones del siguiente sistema según los valores del parámetro a .
- b) Resolverlo cuando sea compatible determinado.

Hoja 8

1. a) Sea M una matriz cuadrada que cumple $|M| = -1$ y $|(-2)M| = 8$. ¿Cuál es el orden de la matriz cuadrada? Justifica tu respuesta.

b) Calcula el determinante de la siguiente matriz cuadrada de orden 4.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ -2 & -4 & -4 & 3 \\ 1 & 2 & 10 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$ y sabemos que $|A| = 2$. Calcula los siguientes determinantes, explicando

adecuadamente los pasos que sigues para calcularlos:

a) $\begin{vmatrix} a-1 & b-1 & c-1 \\ a^2-1 & b^2-1 & c^2-1 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} (a+1)^2 & (b+1)^2 & (c+1)^2 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

3. Sea $A = \begin{pmatrix} a & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$.

a) ¿Para qué valores de a existe la inversa de A ?

b) Hallar el valor de a para que se cumpla $A^{-1} = \frac{1}{4}A$

4. Sea el sistema $\begin{cases} 2x + y + az = -1 \\ -x + ay - z = 2 \\ 2ax - 2y + a^2z = 2 \end{cases}$

a) Discute las soluciones del siguiente sistema según los valores del parámetro a .

b) Resolverlo cuando sea compatible determinado.