Problemas – Tema 7

Enunciados de problemas de ampliación del Tema 5 sobre integrales y del Tema 6 sobre matrices

Hoja 1

1. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 5 & -4 & 3 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 & 3 \\ -2 & 8 & 0 & 9 \end{pmatrix}$. Efectuar:

a) $A+B$

b) $2\mathrm{A}-B$

c) $4\mathrm{A}$

d) $A\cdot B^t$

e) $(B+A)^t\cdot B$

2. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ Efectuar:

a) $(A+B+C)^t$

b) $(A^t+B^t+C^t)^2$

c) $(A\cdot B)^t$

d) $A^t\cdot B^t$

3. Sean A, B y C tres matrices cuadradas del mismo orden. ¿Son ciertas las siguientes igualdades? Justificar la respuesta.

a) $(A+B)^2=A^2+B^2+2\cdot A\cdot B$

b) $(A+C)\cdot(A-C)=A^2-C^2$

c) $(A+B+C)\cdot(A+B-C)=(A+B)^2-C^2$

d) $(A+B)^3=A^3+B^3+3\cdot A^2\cdot B+3\cdot A\cdot B^2$

Hoja 2

1. Hallar todas las matrices que conmutan con:

a) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

c) $C=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

2. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & c \end{pmatrix}$. Hallar a, b y c para que conmuten.

3. Calcular A^n, con $n \in \mathbb{N}$.

a) $A=\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

c) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

d) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

e) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

f) $A=\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Hoja 3

1. Demostrar:

a) Cualquiera que sea la matriz cuadrada M , el producto $M \cdot M^t$ es una matriz simétrica.

b) Si M y N son matrices simétricas, $M \cdot N$ es simétrica si M y N conmutan.

c) Si A es una matriz cuadrada, $A+A^t$ es simétrica.

d) Si A es una matriz cuadrada, $A-A^t$ es antisimétrica.

2. Demostrar:

a) Si A es antisimétrica, entonces A^2 y A^4 son simétricas.

b) Si A es antisimétrica, entonces A^3 y A^5 son antisimétricas.

c) Toda matriz cuadrada se puede expresar como suma de una simétrica y una antisimétrica.

d) El producto de dos matrices ortogonales es ortogonal.

3. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ hallar $B=A+A^2+A^3+\ldots+A^n$

4. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ hallar $B=A+A^2+A^3+\ldots+A^n$

Hoja 4

1. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ hallar $B=A+A^2+A^3+...+A^n$

2. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ hallar $B=A+A^2+A^3+...+A^n$

3. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ hallar A^n

4. Resolver.

a) $\int x \cdot \cos(x)\, dx$

b) $\int x^3 \cdot e^x\, dx$

c) $\int arcotg(x)\, dx$

5. Resolver.

a) $\int e^{3x} \cdot sen(x)\, dx$

b) $\int e^{2x} \cdot (x^3+5x^2-2)\, dx$

c) $\int \ln(x)\, dx$

Hoja 5

1. Resolver.

a) $\int e^x \cdot \cos(x)\,dx$

b) $\int \frac{3x^2-2x+5}{(x+3)^3}\,dx$

c) $\int x\cdot\sqrt{1+x}\,dx$

2. Resolver.

a) $\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}\,dx$

b) $\int \frac{1}{x\cdot\sqrt{x^2-2}}\,dx$

c) $\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt{x+1}}\,dx$

3. Resolver.

a) $\int cosec^3(x)\,dx$

b) $\int \frac{e^{4x}+3}{e^{3x}}\,dx$

c) $\int x^2\cdot e^x\,dx$

4. Resolver.

a) $\int \frac{2x^2+5x-1}{x^3+x^2-2x}\,dx$

b) $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-3)}\,dx$

c) $\int \frac{x^3\cdot\sqrt{1+x^4}}{1+\sqrt{1+x^4}}\,dx$

Hoja 6

1. Resolver.

a) $\int \frac{1}{\cos^4(x)} dx$

b) $\int \frac{1}{\cos^2(x) \cdot sen^2(x)} dx$

c) $\int \frac{1}{2+\cos(x)} dx$

2. Resolver.

a) $\int \frac{1+e^x}{1-e^x} dx$

b) $\int x^2 \cdot \ln(x) dx$

c) $\int x^2 \cdot sen(3x) dx$

3. Resolver.

a) $\int arcosen(x) dx$

b) $\int \frac{x}{(x+1)(x^2+x+1)} dx$

c) $\int \frac{3x-4}{x^2+2x+4} dx$

4. Resolver.

a) $\int \frac{3^x}{1+3^x} dx$

b) $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx$

c) $\int \sqrt{\frac{x+2}{x-1}} dx$

Hoja 7

1. Resolver.

a) $\int \frac{1}{1+sen(x)+\cos(x)}dx$

b) $\int \frac{4e^{3x}}{1+e^{2x}}dx$

c) $\int \frac{1}{\sqrt{sen(x)\cdot\cos^3(x)}}dx$

2. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ hallar A^n .

3. Comprobar que la matriz $A=\begin{pmatrix}\cos x&-sen\,x&0\\sen\,x&\cos x&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ es ortogonal.

4. Encontrar las matrices X, Y cuadradas de orden 2 que verifican $\left\{\begin{matrix}2\cdot X+3\cdot Y=\begin{pmatrix}5&7\\2&9\end{pmatrix}\\X-Y=\begin{pmatrix}0&1\\0&2\end{pmatrix}\end{matrix}\right\}$

5. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ hallar A^n y escribir A como suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica.

6. Demostrar que si $B=\lambda\cdot A+\mu\cdot I$ con $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, entonces A y B conmutan.

Hoja 8

1. Determina si las siguientes matrices tienen inversa.

a) $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ b) $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$

c) $C=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 0 & -1\\ -6 & -1 & 0\end{pmatrix}$ d) $D=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 3\\ 4 & 1 & -1\end{pmatrix}$

2. Determina para qué valores de a no tienen inversa las siguientes matrices.

a) $\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & a & 3\\ 4 & 1 & -a\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & a\\ 4 & 1 & 1\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}4 & 1 & 4\\ 0 & a & 3\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

3. Calcula la inversa de las siguientes matrices.

a) $\begin{pmatrix}3 & 1\\ 8 & 1\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 4 & 3 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 5 & 4\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}$

4. Indica si son ortogonales las siguientes matrices.

a) $\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

5. Determina la matriz X que satisface la ecuación $\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}\cdot X+\begin{pmatrix}0 & 2\\ 5 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 8\\ 8 & 5\end{pmatrix}$

Hoja 9

1. Resuelve las siguientes ecuaciones matriciales.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. Resuelve la siguiente ecuación matricial.

$A \cdot B \cdot X - C \cdot X = 2 \cdot C$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

3. Resuelve la siguiente ecuación matricial.

$(A + B \cdot X)^t = A \cdot B + C$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

4. Resuelve la siguiente ecuación matricial.

$A \cdot X \cdot B + C = 0$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

5. Halla el rango de las siguientes matrices.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 6 & 7 \\ 3 & -1 & -2 & -3 \\ 5 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 4 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

6. Estudiar el rango de las siguientes matrices según los distintos valores de a .

a) $\begin{pmatrix} a & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & a \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2a+2 & 3 & a \\ 4a-1 & a+1 & 2a-1 \\ 5a-4 & a+1 & 3a-4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & a-1 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$

Hoja 10

1. Calcula:

a) La integral definida $\int_0^1 x\,dx$.

b) El área encerrada por la función $f(x)=x$, el eje OX y las rectas verticales $x=0$, $x=1$.

2. Calcula:

a) La integral definida $\int_0^1 x^2\,dx$.

b) El área encerrada por la función $f(x)=x^2$, el eje OX y las rectas verticales $x=0$, $x=1$.

3. Calcula:

a) La integral definida $\int_0^4 (5x-x^2)dx$.

b) El área encerrada por la función $f(x)=5x-x^2$, el eje OX y las rectas verticales $x=0$, $x=4$.

4. Calcula:

a) La integral definida $\int_0^4 (x^2-3x)\,dx$.

b) El área encerrada por la función $f(x)=x^2-3x$, el eje OX y las rectas verticales $x=0$, $x=4$.

5. Calcula:

a) La integral definida $\int_0^{2\pi} sen(x)\,dx$.

b) El área encerrada por la función $f(x)=sen(x)$, el eje OX y las rectas verticales $x=0$, $x=2\pi$.

Hoja 11

1. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Calcula:

a) A^{-1}

b) Resolver $A\cdot X=B-A^2$ (obtener matriz X)

2. Sean $A=\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calcula:

a) ¿Para qué valores de λ existe A^{-1} ?

b) En la ecuación matricial $A\cdot X=B$, obtener X si $\lambda=4$.

3. Calcula:

a) $\int_0^{\pi} \frac{6\,sen(x)}{5-3\cos(x)}dx$

b) $\int \frac{10}{x^2-x-6}dx$

4. Calcula:

a) El área encerrada por la función $f(x)=\cos(x)$, el eje OX y las rectas verticales $x=0$ y $x=\frac{\pi}{2}$.

b) $\int x^2\ln(x)dx$

Hoja 12

1. a) Una matriz es ortogonal si su inversa coincide con su traspuesta. Comprobar si es ortogonal la matriz A .

$$A=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

b) Obtener A^3

2. a) Para qué valores de a no admite inversa la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & a-3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ a & -1 & 2 \end{pmatrix}$

b) Calcular las matrices A y B que satisfacen el siguiente sistema matricial:

$$5A+3B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix}$$

$$3A+2B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$$

3. Calcula:

a) $\int_1^2 \frac{3-x^2+x^4}{x^3} dx$

b) $\int arcocos(x) dx$

4. Calcula:

a) El área encerrada por la función $f(x)=-x^2-3$, el eje OX y las rectas verticales $x=0$ y $x=4$.

b) $\int (2\cos^2(x)+1) dx$