Problemas – Tema 4

Enunciados de problemas de Repaso y Ampliación de la primera evaluación

Hoja 1

1. Estudia y representa $f(x)=\ln(tg\,x)$

2. Estudia y representa $f(x)=\dfrac{5x^2-2x+1}{\sqrt{x^4+6}}$

3. Estudia y representa $f(x)=\dfrac{6x^2+2x-3}{2x^2+6}$

4. Estudia y representa $f(x)=\dfrac{3x^4}{x^4+1}$

5. Estudia y representa $f(x)=\dfrac{x-1}{3}\cdot\sqrt{\dfrac{1}{x-1}}$

6. Estudia y representa $f(x)=\dfrac{tg\,x}{x}$

7. Estudia y representa $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{x}$

8. Estudia y representa $f(x)=\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^2}$

9. Estudia y representa $f(x)=\left(\dfrac{3x-2}{7-9x}\right)^2$

Hoja 2

1. Estudia y representa $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{x}$

2. Estudia y representa $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x-5}$

3. Estudia y representa $f(x)=\sqrt{3x^2-\sqrt{5x}}$

4. Estudia y representa $f(x)=\frac{\sqrt{x}+x}{x^2}$

5. Estudia y representa $f(x)=x\cdot\sqrt{x^2-1}$

6. Estudia y representa $f(x)=3x^4-4x^3$

7. Estudia y representa $f(x)=x^4-6x^2+5x+2$

8. Estudia y representa $f(x)=\frac{x}{(x+1)^2}$

9. Estudia y representa $f(x)=2\cdot sen(2x)$

10. Estudia y representa $f(x)=x+\frac{1}{e^x}$

11. Estudia y representa $f(x)=\frac{2x^2-x-3}{x}$

12. Estudia y representa $f(x)=arctg(\frac{1+x}{1-x})$

Hoja 3

1. Estudia y representa $f(x)=2^{sen(x)}$

2. Estudia y representa $f(x)=tg(x^2-2x)$

3. Estudia y representa $f(x)=\sqrt{sen(x)}$

4. Estudia y representa $f(x)=\ln\left(\frac{3x^2-1}{x+5}\right)$

5. Estudia y representa $f(x)=(cosx)^{e^x}$

6. Estudia y representa $f(x)=\frac{6}{\sqrt[3]{x^2+4}}$

7. Estudia y representa $f(x)=(sen\, x)^{\cos x}$

8. Estudia y representa $f(x)=(x+\ln x)^{\sqrt{x}}$

9. Estudia y representa $f(x)=x^{tg\, x}$

10. Estudia y representa $f(x)=(x^2-3x)^{x^2}$

11. Estudia y representa $f(x)=\ln(2^x-3x)$

12. Estudia y representa $f(x)=\sqrt{e^{5x-1}}$

Hoja 4

1. Estudia y representa $f(x)=\ln^2(6x+4)$

2. Estudia y representa $f(x)=e^{\frac{2x}{x^2+1}}$

3. Estudia y representa $f(x)=sen(3x^2-x)$

4. Estudia y representa $f(x)=sen(\ln(x)+3x)$

5. Estudia y representa $f(x)=x^3\,sen(x^2)$

6. Estudia y representa $f(x)=tg(2x^2+x)$

7. Estudia y representa $f(x)=cotg(\ln x)$

8. Estudia y representa $f(x)=arcosen(\frac{x}{x+1})$

9. Estudia y representa $f(x)=arcocos(x-\sqrt{x})$

10. Estudia y representa $f(x)=e^{2x}+12e^{x}+4x^2+\pi\cdot x+e$

11. Estudia y representa $f(x)=e^{-x^2}$

12. Estudia y representa $f(x)=\frac{1}{2+sen\,x-\cos x}$

Hoja 5

1. Calcula.

$$\lim_{x \to -2} \left[\frac{x+3}{5+2x} \right]^{\frac{1}{x+2}}$$

2. Calcula a para que se cumpla la siguiente igualdad.

$$\lim_{x \to \infty} \left[\frac{4x^2+1}{4x^2+\pi} \right]^{ax^2} = e^{\frac{1}{2}}$$

3. Demostrar:

$$\lim_{x \to x_0} [f(x)]^{g(x)} = e^{\lim_{x \to x_0} g(x)\cdot[f(x)-1]}$$, si $\lim_{x \to x_0} f(x)=1$ y $\lim_{x \to x_0} g(x)=\infty$

4. Calcula.

$$\lim_{x \to \infty} \left[\frac{3x+6}{3x-8} \right]^{2x}$$

5. Calcula sin utilizar L'Hôpital.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{1-e^x}$$

6. Encuentra una solución con precisión de dos cifras decimales de la gráfica.

$$f(x)=\ln(x)+x$$

Hoja 6

1. Calcula.

$$\lim_{x \to \infty} \left[\frac{3x^2}{3x^2 - 7} \right]^{6x}$$

2. Calcula.

$$\lim_{x \to \infty} \left[1 + \frac{1}{x} \right]^{x+k} \quad , \quad k \in \mathbb{R}$$

3. Calcula.

$$\lim_{x \to \infty} \left[1 - \frac{1}{x} \right]^{x}$$

4. Calcula sin utilizar L'Hôpital.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{x + sen(x)}$$

5. Encuentra una solución con precisión de dos cifras decimales de la gráfica.

$$f(x) = e^x + x$$

6. Encuentra una solución con precisión de dos cifras decimales de la gráfica.

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\ln(x)} - 2$$

7. Obtener con precisión de una cifra decimal la única solución que posee la función $f(x) = 3^{x^2+x} + x$. Y calcular, para $x = 2$, la ecuación de la recta tangente a la función.

Hoja 7

1. Calcula sin utilizar L'Hôpital.

$$\lim_{x \to 0}\left[\frac{e^{2x}-1}{sen(3x)}\right]$$

2. Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones continuas en $[0,1]$, tales que $f(0)>g(0)$ y $f(1)<g(1)$. Demostrar que sus gráficas se cortan.

3. $f(x)=x^5+3x-5$ tiene una solución comprendida entre 1 y 2. Demostrar que existe esa solución y obtenerla con una precisión de dos cifras decimales.

4. Hallar k para que la función $f(x)=\dfrac{x^2+k\cdot x+5}{x^2-3x+2}$ tenga una discontinuidad evitable en $x=2$.

5. Demostrar que la derivada de una función elevada a otra función, es decir $y=f(x)^{g(x)}$, es $y'=f(x)^{g(x)}\cdot g'(x)\cdot\ln f(x)+g\cdot f(x)^{[g(x)-1]}\cdot f'(x)$

6. La recta $y=3x-1$ es tangente a la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+3$ en el punto $x=2$. Hallar a y b.

7. Estudiar la derivabilidad de $f(x)=\sqrt{|x|}$ en $x=0$ aplicando la definición de derivada para $x=0$.

8. Estudiar la derivabilidad de $f(x)=\left\{\begin{matrix} x\cdot sen(\frac{1}{x}) \;\; si \;\; x\neq 0 \\ 0 \;\; si \;\; x=0\end{matrix}\right\}$ en $x=0$ aplicando la definición de derivada para $x=0$.

9. Estudiar la derivabilidad de $f(x)=\left\{\begin{matrix} \dfrac{x-1}{1+x^{\frac{1}{x-1}}} \;\; si \;\; x\neq 1 \\ 0 \;\; si \;\; x=1\end{matrix}\right\}$ en $x=1$ aplicando la definición de derivada para $x=1$.

Hoja 8

1. $f(x)=x\cdot 2^x-1$ tiene una solución comprendida entre 0 y 1. Demostrar que existe esa solución y obtenerla con una precisión de dos cifras decimales.

2. La ecuación $x^3-3x+1=0$ tiene sus tres soluciones distintas en el intervalo $[-5,5]$. Demostrar la existencia de estas soluciones y obtenerlas con una precisión de una cifra decimal.

3. Demostrar que todo número positivo posee una raíz cuadrada.

4. Hallar m y n para que la función $f(x)=\frac{x^2-2x+n}{x^3+m\cdot x^2-14x}$ tenga una discontinuidad evitable en $x=2$.

5. Demostrar que $x+sen(x)-8=0$ tiene al menos una solución y obtenerla con precisión de una cifra decimal.

6. Sea $f(x)=x^3+bx^2+cx+3$. Calcular b y c para que:

a) La recta tangente en los puntos $x=0$ y $x=2$ sea horizontal.

b) La recta tangente en el punto $x=1$ forme 45º con el eje OX, y la recta tangente en $x=3$ tenga pendiente igual a 2.

7. Estudiar la derivabilidad de $f(x)=(x\cdot sen\,x)^{\frac{1}{3}}$ en $x=0$ aplicando la definición de derivada para $x=0$ (Nota: recuerda que si un límite en un punto tiende a infinito, siempre debemos estudiar los límites laterales).

8. Estudiar la derivabilidad de $f(x)=\left\{\begin{matrix} x^2\cdot sen\left(\frac{1}{x}\right) & si & x\neq 0 \\ 0 & si & x=0 \end{matrix}\right\}$ en $x=0$ aplicando la definición de derivada para $x=0$.

9. Estudiar la derivabilidad de $f(x)=|x|^3$ en $x=0$ aplicando la definición de derivada para $x=0$.

Hoja 9

1. Se desea construir un depósito en forma de cilindro recto, con base circular y sin tapadera, que tenga una capacidad de $125\,m^3$. Halla el radio de la base y la altura que debe tener el depósito para que la superficie del depósito sea mínima. ¿Cuál es esa superficie mínima?

2. Un agricultor hace un estudio para plantar árboles en una finca. Sabe que si planta 24 árboles la producción media de cada uno de ellos es de 600 frutos. Estima que por cada árbol adicional plantado, la producción de cada árbol disminuye en 15 frutos por agotamiento de los recursos naturales del suelo.

¿Cuál debe ser el número total de árboles que debe tener la herta para que la producción sea máxima? ¿Cuál es esa producción máxima?

3. Sea la función $f(x)=2\sqrt{x}$.

a) Hallar el dominio y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Calcular el punto (x,y) de la gráfica de $f(x)$ más cercano al punto $(4,0)$. Obtener esa distancia mínima.

4. Se tiene un cuadrado de mármol de lado $80\,cm$. Se produce la rotura de una esquina y queda un pentágono irregular de vértices $A(0,20)$, $B(20,0)$, $C(80,0)$, $D(80,80)$ y $E(0,80)$. Para obtener una pieza rectangular se elige un punto $P(x,y)$ del segmento $\overline{AB}$ y se hacen dos cortes paralelos a los ejes OX y OY . Así se obtiene un rectángulo R cuyos vértices son los puntos $P(x,y)$, $F(80,y)$, $D(80,80)$ y $G(x,80)$.

Obtener el punto $P(x,y)$ para que el área del rectángulo R sea máxima. Obtener el valor de ese área máxima.

5. Un nadador está en el mar en un punto N, situado a 3 km de una playa recta, y justo en frente de un punto S, situado en la playa junto al agua. Quiere ir a un punto A, situado también junto al agua y a 6 km del punto S, de modo que el triángulo NSA es rectángulo en el vértice S. El nadador nada a una velocidad constante de 3 km/h y camina a una velocidad constante de 5 km/h.

Calcular la distancia del punto A respecto de S para que el tiempo que tarda el nadador en ir del punto N al punto A sea mínimo. Calcular ese tiempo mínimo.

6. La fabricación de x tabletas gráficas supone un coste total dado por la función $C(x)=1500\,x+1\,000\,000$. Cada tableta se venderá a un precio unitario dado por la función $P(x)=4000-x$. Suponiendo que todas las tabletas fabricadas se venden, ¿cuál es el número que hay que producir para obtener el beneficio máximo? Obtener ese beneficio máximo.

7. Determina el área máxima que puede tener un rectángulo cuya diagonal mide 8 metros. ¿Cuáles son las dimensiones de ese rectángulo de área máxima?

Hoja 10

1. $\lim_{x \to 0} (\cos(x))^{\left(\frac{1}{sen(x)}\right)^2}$

2. $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{3x^2+2x+2} - \sqrt{3x^2+x}\right)$

3. $\lim_{x \to 1} \frac{\ln(2x-1)}{x^2-\sqrt{x}}$

4. $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}$

5. $\lim_{x \to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$

6. Calcula el valor de m que satisface $\lim_{x \to +\infty} \frac{(1-mx)(2x+3)}{x^2+4} = 6$

7. $\lim_{x \to 1} \frac{1-x}{1-\sqrt{x}}$

8. $\lim_{x \to 0} \frac{1-2x-e^x+sen(3x)}{x^2}$

9. $\lim_{x \to +\infty} \frac{(5x^2+2)(x-6)}{(x^2-1)(2x-1)}$

Hoja 11

1. Sea $f(x)=\frac{x^2+3}{x^2+2}$. Determina las asíntotas y los intervalos de crecimiento. ¿Tiene algún extremo relativo?

2. Determina, si existen, los extremos relativos y puntos de inflexión de $f(x)=\frac{e^x}{x+1}$.

3. Sea $f(x)=x^2 e^{-x^2}$. Determina las asíntotas y los intervalos de crecimiento. Hallar, si existen, los extremos relativos de la función.

4. Estudiar las asíntotas de $f(x)=\frac{x^2+x-1}{x^2-x-2}$.

5. ¿Cómo se define la continuidad de una función en un punto? ¿Qué tipo de discontinuidad tiene $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2-2x}$ en los puntos $x=0$ y $x=2$?

6. Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica $f(x)=2x^3-6x^2+1$ en su punto de inflexión.

7. Dada la función $f(x)=\frac{ax+b}{cx-1}$ calcula los valores de a , b y c sabiendo que $x=\frac{1}{2}$ es una asíntota vertical y que $y=5x-6$ es la recta tangente a su gráfica en el punto $x=1$.

8. Calcula el área del triángulo que forma el eje horizontal OX con las rectas tangente y normal a la función $f(x)=-x^2$ en el punto $x=1$.

9. La función $f(x)=\frac{ax^2+b}{x}$ tiene una recta tangente horizontal en el punto $P(2,4)$. Hallar los valores de a , b .

10. Estudia el dominio, las asíntotas, los intervalos de crecimiento y los extremos relativos de $f(x)=\frac{1-\ln x}{x}$.

11. Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)=(x+1)e^{2x}$.

Hoja 12

1. Dada la función $f(x)=x\cdot\ln(x)-x$, se pide:

a) Determinar el punto de la gráfica para el cual la recta tangente es paralela a la bisectriz del primer cuadrante. Calcular la ecuación de dicha recta tangente.

b) Determinar el punto de la gráfica para el cual la recta tangente es paralela al eje OX . Calcular la ecuación de dicha recta tangente.

2. Se sabe que la función $f(x)$ es derivable en toda la recta real, y que está definida en el intervalo $(-\infty,0)+\{0\}$ por la fórmula $f(x)=1+2x+ax^2$ y en el intervalo $(0,+\infty)$ por la fórmula $f(x)=ax+b$. Encontrar a y b .

3. Dada la función $f(x)=tg\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6x}\right)+\frac{2}{\sqrt{17-2x-3x^2}}$ demuestra que existe un valor $\alpha\in(1,2)/ f'(\alpha)=1$.

Ayuda: $tg\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$, $tg\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$

4. Dada $f(x)=\frac{\cos(x^3+2x^2+3x)}{\sqrt{x^2+x+2}}$, demuestra que existe un valor $\alpha\in(-2,1)/ f'(\alpha)=0$.

5. Utiliza el teorema de Bolzano y el teorema de Rolle para probar que $x^4-2x^3-1=0$ solo tiene una solución negativa.

6. Calcula a para que $f(x)=\begin{Bmatrix} 1-\cos(x) & si & x\leq 0 \\ x^2+ax & si & x>0\end{Bmatrix}$ verifique el teorema de Rolle en el intervalo $\left[\frac{-\pi}{2},1\right]$. Para ese valor de a obtener el valor $c\in\left(\frac{-\pi}{2},1\right)/ f'(c)=0$ que predice el teorema.

7. ¿Se puede aplicar el teorema de Lagrange, o teorema del valor medio del cálculo diferencial, a la función $f(x)=\frac{1}{2-x}$ en el intervalo $[0,1]$? En caso afirmativo, calcular el punto que predice el teorema.

8. Aplica el teorema de Bolzano para probar que la ecuación $\cos(x)=x^2-1$ tiene al menos una solución positiva.

9. Calcula asíntotas, intervalos de crecimiento, extremos relativos y puntos de inflexión de $f(x)=e^{-x^2}$.

Hoja 13

1. Sea la función $f(x)=\frac{e^x}{(1+e^x)^2}$.

a) Calcular un punto de su gráfica tal que la recta tangente en dicho punto sea paralela al eje OX . Obtener ecuación de esa recta tangente.

b) Obtener la recta normal a la función en el punto $x=\ln(5)$.

2. Calcula los parámetros a y b para que la función $f(x)=\begin{cases} x^2-2x+a & si \quad x\leq 0 \\ x^2+be^x+3 & si \quad x>0 \end{cases}$ sea continua y derivable en $x=0$. Para los valores encontrados, calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica en $x=0$.

3. Sea la función $f(x)=\begin{cases} sen(x) & si \quad -2\pi\leq x<0 \\ x^2-2x & si \quad 0<x<3 \end{cases}$.

a) ¿Es la función derivable en $x=0$?

b) Calcula los puntos de corte con los ejes y determina sus intervalos de cecimiento.

c) Realiza un esbozo de su gráfica.

4. Obtener m para que la función $f(x)=\begin{cases} m(x+1)e^{2x} & si \quad x\leq 0 \\ \frac{(x+1)sen(x)}{x} & si \quad x>0 \end{cases}$ sea continua en $x=0$.

5. Sea la función $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & si \quad -2\leq x\leq -1 \\ \frac{x^2-3}{2} & si \quad -1<x\leq 0 \end{cases}$.

a) ¿Es continua en $[-2,0]$?

b) ¿Es derivable en $(-2,0)$?

c) Estudia el crecimiento y decrecimiento de la función en su dominio de definición.

6. Sea $f(x)=\begin{cases} a+\ln(1-x) & si \quad x<0 \\ x^2e^{-x} & si \quad x\geq 0 \end{cases}$.

a) Calcula a para que la función sea continua en toda la recta real.

b) Estudiar la derivabilidad de la función.