Problemas – Tema 3

Enunciados de problemas de Derivabilidad

Hoja 1

1. Calcula la derivada de $f(x)=x\cdot\sqrt{2x^2+3x-1}$ **solución:** $\frac{8x^2+9x-2}{2\cdot\sqrt{2x^2+3x-1}}$

2. Encuentra tres números no negativos que sumen 14 y tales que uno sea doble de otro y la suma de sus cuadrados sea máxima o mínima.

solución: suma máxima: 0, 0, 14; suma mínima: 3, 5, 6.

3. Dada la curva $f(x)=x^3-3x^2+2$

a) Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x=1$.

b) Determina si la curva de $f(x)$ queda por debajo o por encima de la recta tangente del apartado anterior.

solución:

a) $y=-3x-3$

b) $x<1$ curva por debajo de la tangente; $x=1$ punto de tangencia; $x>1$ curva por encima de la tangente.

4. Halla la parábola que pasa por $A(-1,-11)$ y cuyo máximo absoluto sea el punto $B(3,5)$.

solución: $f(x)=-x^2+6x-4$

5. Obtener el triángulo isósceles de área máxima inscrito en un círculo de radio 12 cm.

solución: es un triángulo equilátero de lado $12\cdot\sqrt{3}$

6. Descomponer el número 44 en dos sumandos tales que el quíntuplo del cuadrado del primero más el séxtuplo del cuadrado del segundo sea un mínimo.

solución: 20 y 24

7. Se tiene un alambre de 1 m de longitud y se desea dividirlo en dos trozos para formar con uno de ellos un círculo y con el otro un cuadrado. Determinar la longitud que se ha de dar a cada uno de los trozos para que la suma de las áreas del círculo y del cuadrado sea mínima.

Solución: 0,439m (círculo), 0,561m (cuadrado)

Hoja 2

1. Calcula la derivada de $f(x)=\dfrac{3x+2}{(x+1)^2}$ **solución:** $\dfrac{-3x-1}{(x+1)^3}$

2. Una compañía de cruceros ofrece un viaje para al menos 100 personas por un precio inicial de 2000 euros por persona. Para animar las ventas decide rebajar el precio inicial en 10 euros por cada persona que rebase las 100. Así pues, si se apuntaran 120 personas, cada uno pagará $(2000-20\cdot 10)=1800$ euros. Calcula el número de personas que maximiza los ingresos de la compañía.

solución: 150 personas

3. Usa la definición formal de derivada para obtener la derivada de $f(x)=\dfrac{1}{x}$

solución: $f(x)=\dfrac{-1}{x^2}$

4. Un triángulo isósceles de perímetro 30 cm, gira alrededor de su altura engendrando un cono. ¿Qué valor debe darse a la base para que el volumen del cono sea máximo?

solución: 12 cm

5. Se pretende fabricar una lata de conserva cilíndrica (con tapa) de 1 litro de capacidad. ¿Cuáles deben ser sus dimensiones para que se utilice el mínimo posible de metal?

solución: $radio=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2\cdot\pi}}$ $altura=\sqrt[3]{\dfrac{4}{\pi}}$

6. Hallar las dimensiones del mayor rectángulo inscrito en un triángulo isósceles que tiene por base 10 cm y por altura 15 cm.

solución: $5\,cm$, $\dfrac{15}{2}cm$

7. Hallar las dimensiones que hacen mínimo el coste de un contenedor que tiene forma de paralelepípedo rectangular sabiendo que su volumen ha de ser 9 m^3 , su altura 1 m y el coste de su construcción por m^2 es de 50 € para la base; 60 para la etapa y 40 para cada pared lateral.

solución: anchura $3\,m$, profundidad $3\,m$

8. Halla la derivada de $f(x)=5x^2+2x-6$ en $x=-2$ mediante la definición de derivada.

solución: -18

Hoja 3

1. Recortando convenientemente en cada esquina de una lámina de cartón de dimensiones $80\,cm\,x\,50\,cm$ un cuadrado de lado x y doblando convenientemente, se construye una caja. Calcular x para que volumen de dicha caja sea máximo.

solución: $10\,cm$

2.Un sector circular tiene un perímetro de $10\,m$. Calcular el radio y la amplitud del sector de mayor área.

solución: $radio\ \frac{5}{2}m$, $ángulo\ 2\ radianes$

3. El valor de un rubí es proporcional al cuadrado de su peso. Divide un rubí de $2\,g$ en dos partes de forma que la suma de los valores de los dos rubíes formados sea mínima.

solución: dos trozos de $1\,gramo$ cada uno.

4. Una compañía de autobuses ha comprobado que el número de viajeros (N) diarios depende del precio del billete (p) según la expresión $N(p)=300-6\cdot p$

a) ¿Cuál es la expresión de los ingresos diarios?

b) ¿Qué ingreso diario se obtiene si el precio del billete es de 15 euros?

c) ¿Cuál es el precio del billete que hace máximos los ingresos diarios? ¿Cuáles son esos ingresos máximos?

solución: a) $N(p)=300\cdot p-6\cdot p^2$ b) 3150 euros c) 25 euros por billeta, 3750 euros

5. Con un hilo de 60 cm de longitud, forma un rectángulo que al girar alrededor de uno de sus lados, engendre un cilindro de área total máxima.

6. Estudia la continuidad y derivabilidad de $f(x)=\begin{Bmatrix} x^2-4 & si & x\le -2 \\ \sqrt{x+2} & si & -2<x\le 2 \\ e^{-x^2} & si & 2<x \end{Bmatrix}$

7. Usando la definición de derivada, calcula la derivada en $x=-1$, $x=0$ y $x=2$ de la siguiente función $f(x)=\begin{Bmatrix} 2x+3 & si & x\le 0 \\ x^2+2 & si & x>0 \end{Bmatrix}$ **solución:** 2, no existe, 4

8. ¿En qué punto la recta tangente a $f(x)=x^2+5x-6$ es paralela a la bisectriz del primer cuadrante? Halla la ecuación de la recta.

solución: $x=-2$; $y=x-10$

Hoja 4

1. Una hoja de papel debe tener 18 cm^2 de texto impreso, márgenes superior e inferior de 2 cm de altura y márgenes laterales de 1 cm de anchura. Obtener razonadamente las dimensiones que minimizan la superficie del papel.

solución: anchura $5\,cm$, altura $10\,cm$

2. El beneficio neto mensual, en millones de euros, de una empresa que fabrica autobuses viene dado por la función $f(x)=1{,}2\cdot x-(0{,}1\cdot x)^3$. Calcula la producción mensual que hacen máximo el beneficio y el beneficio máximo.

solución: 20 autobuses, 16 millones

3. Encontrar, de entre todas las rectas que pasan por el punto (1, 2) aquella que forma con la partes positivas de los ejes de coordenadas un triángulo de área mínima.

solución: $y=-2x+4$

4. Una boya, formada por dos conos rectos de hierro unidos por sus bases ha de ser construido mediante dos placas circulares de 3 m de radio. Calcular las dimensiones de la boya para que su volumen sea máximo.

solución: $radio=\sqrt{6}\ metros \quad altura\ cono=\sqrt{3}\ metros$

5. Determina la ecuación de una función de segundo grado, sabiendo que pasa por el punto $P(2,6)$ y que el valor de la pendiente de la recta tangente en el punto $Q(1,-1)$ es 5.

solución: $f(x)=2\cdot x^2+x-4$

6. Dadas las funciones $f(x)=x^2-ax-4$ y $g(x)=\frac{x^2}{2}+b$, halla los valores de a y b de manera que las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ tengan la misma recta tangente en el punto $x=3$. Halla la ecuación de la recta.

solución: $a=3$, $b=\frac{-17}{2}$, $y=3x-13$

7. Obtener a y b para que $f(x)$ sea derivable para cualquier valor de x.

$$f(x)=\begin{cases} a+b\cdot x-x^2 & si \quad x\leq 1 \\ \frac{1}{x} & si \quad x>1 \end{cases}$$

solución: $a=1$, $b=1$

Hoja 5

1. ¿En qué puntos no es derivable $f(x)$?

$$f(x)=\begin{Bmatrix} 3x^3-27 & si & x<2 \\ -3 & si & x\geq 2 \end{Bmatrix}$$

2. ¿En qué puntos no es derivable $f(x)$?

$$f(x)=\begin{Bmatrix} 6x^2+2x-7 & si & x\leq 1 \\ 5x^2+4x & si & x>1 \end{Bmatrix}$$

3. ¿En qué puntos no es derivable $f(x)$?

$$f(x)=|x^2+2\mathrm{x}-15|$$

4. Determinar a y b para que la función sea continua en todo $\mathbb{R}$.

$$f(x)=\begin{Bmatrix} x^2+3 & si & x<0 \\ a\,x+b & si & 0\leq x\leq 2 \\ x^3-1 & si & x>2 \end{Bmatrix}$$

solución: $a=2$, $b=3$

5. Obtener m y n para que $f(x)$ sea continua. Estudia su derivabilidad para esos valores.

$$f(x)=\begin{Bmatrix} x^2+1 & si & x<0 \\ m\,x+n & si & 0\leq x\leq 3 \\ x-5 & si & x>3 \end{Bmatrix}$$

6. Obtener $a, b, c\,y\,d$ para que $f(x)$ sea continua. Estudia su derivabilidad para esos valores.

$$f(x)=\begin{Bmatrix} -x^2+a\,x+b & si & x<0 \\ c\,x & si & 0\leq x\leq 1 \\ (x-1)^2+d\cdot(x-1)+1 & si & x>1 \end{Bmatrix}$$

Hoja 6

1. Estudia la continuidad y derivabilidad de $f(x)$ en $x=0$.

$$f(x)=\begin{cases} 0 & si \quad x=0 \\ \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & si \quad x\neq 0 \end{cases}$$

2. Estudia la continuidad y derivabilidad de $f(x)$.

$$f(x)=\begin{cases} x^2+3x & si \quad x\leq 0 \\ x^3+3x & si \quad 0<x<2 \\ \dfrac{1}{x} & si \quad 2\leq x\leq 5 \\ \ln(x-4) & si \quad x>5 \end{cases}$$

3. Estudia la continuidad y derivabilidad de f(x) según el parámetro a .

$$f(x)=\begin{cases} x^2+6x+8 & si \quad x\leq -2 \\ 2x+4 & si \quad -2<x<0 \\ a\cdot\cos(x) & si \quad x\geq 0 \end{cases}$$

4. Halla los valores $a\,y\,b$ para que $f(x)$ sea continua y derivable en toda la recta real.

$$f(x)=\begin{cases} a x^2+b x-1 & si \quad x\leq 1 \\ 2\cdot b\cdot x & si \quad x>1 \end{cases}$$

5. Estudia la continuidad y derivabilidad de $f(x)$.

$$f(x)=(x-2)\cdot|x^2-2x|$$

Hoja 7

1. Estudia la continuidad y derivabilidad de $f(x)$ en su dominio de definición.

$$f(x)=\begin{cases} x-1+\cos(x-1) & si \quad x\leq 1 \\ \dfrac{sen(x-1)}{x-1} & si \quad x>1 \end{cases}$$

2. Estudia la continuidad y derivabilidad de $f(x)$ en su dominio de definición.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{1-|x|} & si \quad x\neq -1 \quad y \quad x\neq 1 \\ 0 & si \quad x=-1 \quad ó \quad x=1 \end{cases}$$

3. Determinar $a\ y\ b$ para que $f(x)$ sea derivable en todos los valores de x.

$$f(x)=\begin{cases} a\cdot x+5 & si \quad x\leq 1 \\ a\cdot\sqrt{x}+\dfrac{b}{x} & si \quad x>1 \end{cases}$$

4. Estudiar la derivabilidad de $f(x)=x^2+1+|5x-1|$

5. Estudiar la derivabilidad y continuidad de $f(x)$ para todo valor de x.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln(x)} & si \quad x\neq 1 \\ 1 & si \quad x=1 \end{cases}$$

6. Sea $f(x)=x^2-2$ y $g(x)=\ln(x)$.

Estudiar continuidad y derivabilidad de las composiciones (f○g)(x) y (g○f)(x).

7. Estudiar la derivabilidad de $f(x)=x\cdot|x-2|$

8. Estudiar continuidad y derivabilidad de $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{cosx} & si \quad \dfrac{-\pi}{2}<x<0 \\ x^2 & si \quad 0\leq x\leq \pi \\ \ln\left(\dfrac{x}{x-\pi}\right) & si \quad x>\pi \end{cases}$

Hoja 8

1. ¿Existen valores de $a, b\ y\ c$ que hagan $f(x)$ derivable en $[0,2]$?

$$f(x)=\begin{cases} x^3-12x+1 & si \quad 0\leq x\leq 1 \\ ax^2+bx+c & si \quad 1<x\leq 2 \end{cases}$$

2. Determinar $a\ y\ b$ para que $f(x)$ sea continua y derivable en todo su dominio.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{ax+bx^2}{2} & si \quad 0\leq x\leq 1 \\ \dfrac{1}{2} & si \quad 1<x \end{cases}$$

3. Estudiar derivabilidad de $f(x)=x^2-|x|$

4. Estudiar derivabilidad de $f(x)=|2\mathrm{x}-|3-2\mathrm{x}||$

5. ¿Existe un valor de k que haga a $f(x)$ derivable en toda la recta real?

$$f(x)=\begin{cases} x+k & si \quad x\leq 0 \\ \dfrac{e^{x^2}-1}{x^2} & si \quad x>0 \end{cases}$$

6. Estudiar derivabilidad de $f(x)=x^2\cdot|x-3|$

7. Estudiar continuidad y derivabilidad de $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{sen(x)} & si \quad \dfrac{-\pi}{2}<x<0 \\ x^2 & si \quad 0\leq x\leq \pi \\ \ln(x-\pi) & si \quad x>\pi \end{cases}$

8. Sea $f(x)=tg\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ y $g(x)=\ln(x)$.

Estudiar continuidad y derivabilidad de las composiciones (f○g)(x) y (g○f)(x).

Hoja 9

1. Demuestra que la ecuación $e^x=1+x$ tiene solamente una solución.

2. Demuestra que la ecuación $x^2=x\cdot sen(x)+\cos(x)$ tiene solo dos raíces reales.

3. Demuestra que la ecuación $x^{2009}+x+1=0$ tiene solamente una solución.

4. Demuestra que la ecuación $6x^5+2x+m=0$ tiene solamente una raíz real, cualquier que sea el valor de m .

5. Demuestra que la ecuación $x^3-27x+m=0$ no puede tener más de una raíz en el intervalo $(-1,1)$, cualquiera que sea el valor de m .

6. Demuestra que, dada la función $f(x)=\frac{k}{x}$, es posible aplicarle el teorema del valor medio en el intervalo $[a,b]$, siendo a y b número reales positivos y tal que el punto donde se cumple el teorema es $c=\sqrt{a\cdot b}$.

7. Demuestra que $sen(x+a)-sen(x)=a\cdot\cos(x_0)$, siendo $x<x_0<x+a$ y a un número real positivo.

8. Dada la función $f(x)=|x^3-x|$:

a) Estudia si es aplicable el teorema de Rolle a la función en los intervalos $[-1,1]$ y $[-1,0]$.

b) De una función $g(x)$ se sabe que es continua en el intervalo cerrado $[0,1]$ y que para $0<x\leq 1$ se tiene $g(x)=\frac{f(x)}{x}$, donde $f(x)$ es la función del apartado anterior. ¿Cuál es el valor de $g(0)$?

Hoja 10

1. Determina a para que el siguiente límite exista y sea finito, y para ese valor de a calcula el valor del límite.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x}-e^{-x}+a\,x}{x-sen(x)}$$

2. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{sen(x)}-x-1}{2x^2+x^3}$

3. $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{\ln(x+a)}{\ln(x)}\right)^{x\cdot\ln(x)}$

4. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{2^x+4^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$

5. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x}-e^{sen(x)}}{1-\cos(x)}$

6. $\lim_{x\to\infty} (\ln(x))^{\frac{1}{e^x}}$

7. $\lim_{x\to 0} (\cos(5x))^{\frac{2}{x^2}}$

8. $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{\cos(x)}{sen(x)}-\frac{1}{x}\right)$

9. Obtener el valor o los valores que verifican las condiciones del teorema de Cauchy para las funciones $f(x)=x$ y $g(x)=x^2-1$ en el intervalo $[2,5]$.

10. Aplica el teorema de Cauchy a las funciones $f(x)=\frac{1}{x}$ y $g(x)=x-1$, y obtén el valor c que cumple las condiciones de este teorema en $[1,5]$.

Hoja 11

1. Se tiene un alambre de 1 m de longitud y se desea dividirlo en dos trozos para formar con uno de ellos un círculo y con el otro un cuadrado. Determinar la longitud que se ha de dar a cada uno de los trozos para que la suma de las áreas del círculo y del cuadrado sea mínima.

2. Estudia la continuidad y derivabilidad de la siguiente función definida a trozos.

$$f(x)=\left\{\begin{matrix} x-1+\cos(x-1) & si & x\leq 1 \\ \dfrac{sen(x-1)}{x-1} & si & x>1 \end{matrix}\right\}$$

3. Aplicar la definición formal de derivada para obtener la derivada de $f(x)=\sqrt{x^2-1}$.

4. Una fábrica construye cajas de latón sin tapa de volumen $500\,cm^3$, para almacenar un líquido colorante. Las cajas tienen base cuadrada. Hallar la altura y el lado de la base de cada caja para que la cantidad de latón empleada sea mínima.

5. Sea f : [1,+∞) → ℝ la función definida por $f(x)=\sqrt{x-1}$. Determina el punto P perteneciente a $f(x)$ que se encuentre a menor distancia del punto $A(2,0)$. ¿Cuál es esa distancia?

6. a) Halla la parábola que pasa por $A(-1,-11)$ y cuyo máximo absoluto sea el punto $B(3,5)$.

b) Dadas las funciones $f(x)=x^2-ax-4$ y $g(x)=\frac{x^2}{2}+b$, halla los valores de a y b de manera que las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ tengan la misma recta tangente en el punto $x=3$. Halla la ecuación de la recta.

7. a) Determina a y b para que $f(x)=\left\{\begin{matrix} e^{a\cdot x} & si & x\leq 0 \\ 2\cdot a+b\cdot sen(x) & si & 0<x \end{matrix}\right\}$ sea derivable en todo su dominio.

b) Demuestra que la ecuación $e^x=2+x$ tiene solamente una solución positiva.

Hoja 12

1. Estudia y representa gráficamente la función $f(x)=\dfrac{x}{x+2}$

2. Estudia y representa gráficamente la función $f(x)=\dfrac{x+1}{e^x}$

3. Estudia y representa gráficamente la función $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$

4. Estudia y representa $f(x)=x+e^{-x}$

5. Estudia y representa $f(x)=\ln(x+1)$

6. Estudia y representa $f(x)=\dfrac{x^2}{e^x}$

7. Estudia y representa $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-1}$

8. Estudia y representa $f(x)=\dfrac{2x^2-x-3}{x}$