Problemas – Tema 2

Enunciados de problemas de Límite y Continuidad

Hoja 1

1. Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función $f(x)=|x|$.

solución: continua en toda la recta real. Punto anguloso en $x=0$, donde no es derivable.

2. Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función $f(x)=\begin{Bmatrix} -x & si & x<0 \\ x^2 & si & x\geqslant 0 \end{Bmatrix}$.

solución: continua en $x=0$ y no derivable en $x=0$.

3. Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función $f(x)=\begin{Bmatrix} 1 & si & x<0 \\ x & si & x\geqslant 0 \end{Bmatrix}$

solución: no continua en $x=0$ y, por lo tanto, no derivable en ese punto.

4. Hallar el punto en que $y=|x+2|$ no tiene derivada. Justificar el resultado representando su gráfica.

solución: continua en toda la recta real y no derivable en $x=-2$.

5. Hallar los puntos en que $y=|x^2-5x+6|$ no tiene derivada. Justificar el resultado representando su gráfica.

solución: continua en toda la recta real y no derivable en $x=2$, $x=3$.

6. Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función definida por:

$$f(x)=\begin{Bmatrix} 2+\cos(x) & si & x<0 \\ 1+\frac{2x}{\pi} & si & 0<x<\frac{\pi}{2} \\ 1+sen(x) & si & x\geq\frac{\pi}{2} \end{Bmatrix}$$

solución: no continua en $x=0$ por no estar definida la imagen y, por lo tanto, no derivable en ese punto. Continua en $x=\frac{\pi}{2}$ pero no derivable en ese punto.

Hoja 2

1. Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función $f(x)=\begin{cases} 0 & si \quad x<0 \\ x & si \quad x\geqslant 0 \end{cases}$.

solución: continua en $x=0$ pero no derivable en ese punto.

2. Hallar los puntos en que $y=250-|x^2-1|$ no tiene derivada.

solución: continua en toda la recta real. No derivable en $x=-1$, $x=1$.

3. ¿Para qué valores de $a\ y\ b$ la siguiente función es derivable en todo $\mathbb{R}$?

$$f(x)=\begin{cases} x^3-x & si \quad x\leq 0 \\ ax+b & si \quad x>0 \end{cases}$$

solución: $a=-1, b=0$

4. ¿Para qué valores de $a\ y\ b$ la siguiente función es derivable en todos sus puntos?

$$f(x)=\begin{cases} bx^2+ax & si \quad x<-1 \\ \dfrac{a}{x} & si \quad -1\leq x<1 \\ \dfrac{x^2+ax+1}{x+1} & si \quad x>1 \end{cases}$$

solución: no existe solución, al no estar la función definida en $x=0$.

5. ¿Para qué valores de $a\ y\ b$ la siguiente función es derivable en todos sus puntos?

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2 & si \quad x<0 \\ \sqrt{ax+b} & si \quad 0\leq x<2 \\ \dfrac{-x}{2\cdot\sqrt{2}}+\dfrac{3}{\sqrt{2}} & si \quad x>2 \end{cases}$$

solución: $a=-1, b=4$ la función es continua en todo $\mathbb{R}$. No es derivable en $x=0$. Sí es derivable en $x=2$.

6. ¿Para qué valores de la siguiente función es derivable en $x=1$?

$$f(x)=\begin{cases} 3-a\,x^2 & si \quad x\leq 1 \\ \dfrac{2}{a\,x} & si \quad x>1 \end{cases}$$

solución: $a=1$

Hoja 3

1. Calcula el límite de la sucesión $\dfrac{(n-2)^2}{3(n+1)^2+3(n-1)^2}$

solución: $\dfrac{1}{6}$

2. Determina el valor de a para que el siguiente límite sea igual al número e .

$\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{x+3}{x}\right)^{a \cdot x}$

solución: $a=\dfrac{1}{3}$

3. Dejamos caer una pelota desde una altura de 4 metros y, tras cada rebote, la altura alcanzada se reduce a la mitad de la altura anterior.¿Qué altura alcanzará la pelota después de cada uno de los cinco primero rebotes? ¿Y tras el vigésimo rebote? ¿Y tras el rebote n-ésimo? Obtener una cota superior e inferior de la sucesión de valores de la altura a partir del primer rebote. Calcular el límite en el infinito de la sucesión:

solución: $4, 2, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{16}, \ldots, 2^{2-n}$. Cota superior 2 . Cota inferior 0 . $Límite=0$.

4. Calcula $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\sqrt{n^2-5n+4}-n\right)$

solución: $\dfrac{-5}{2}$

5. Sea $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x^2-4}$. Calcular sus asíntotas.

solución: Asíntotas verticales en $x=2, x=-2$. Asíntota horizontal en $y=1$.

6. Calcula $\lim\limits_{x \to \infty} \left(e^x-x^2\right)$

solución: ∞

Hoja 4

1. Demuestra que la sucesión $\frac{2n}{n+1}$ es monótona creciente y calcula $\lim_{n\to\infty}\left(n^2(a_{n+1}-a_n)\right)$

solución: 2

2. Determina el valor de a para que el siguiente límite sea igual a 1 .

$\lim_{n\to\infty}\left(2x-\sqrt{4x^2+ax+1}\right)$

solución: $a=-4$

3. Calcula $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^n-8}{2^{n+1}}\right)$

solución: $\frac{1}{2}$

4. Sea $f(x)=\frac{bx}{x-a}$. Calcula $a\ y\, b$ para que la función tenga asíntota vertical en $x=2$ y asíntota horizontal en $y=3$.

solución: $a=2, b=3$

5. Sea $f(x)=\frac{x^3}{x^2+1}$. Calcular sus asíntotas.

solución: $y=x$

6. Calcula

a) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{4^x+5^x}{3^x+6^x}\right)$

b) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4^x+5^x}{3^x+6^x}\right)$

solución: a) 1 b) 0

Hoja 5

1. Estudia la continuidad de la función $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+3x+2}$ y clasifica los tipos de discontinuidad.

solución: En $x=-1$ discontinuidad evitable. En $x=-2$ discontinuidad no evitable, de primera especie, de salto infinito.

2. Analiza la continuidad de la función en $x=0$.

$$f(x)=\begin{cases} \frac{2^x-1}{x} & si \quad x<0 \\ \frac{cosx}{x^2+1} & si \quad x\geq 0 \end{cases}$$

solución: discontinuidad no evitable, de primera especie, de salto finito

3. Determinar k para que la función sea continua en $x=0$.

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x+1-e^x}{2x+1-e^{2x}} & si \quad x<0 \\ (2x-k)^2 & si \quad x\geq 0 \end{cases}$$

solución: $k=\frac{-1}{2},\frac{1}{2}$

4. Determinar $a\,y\,b$ para que la función sea continua en toda la recta real.

$$f(x)=\begin{cases} x^2+3 & si \quad x<0 \\ a\,x+b & si \quad 0\leq x\leq 2 \\ x^3-1 & si \quad x>2 \end{cases}$$

solución: $a=2,b=3$

5. Demuestre que la función $f(x)=2+2x-e^x$ corta al eje OX en el intervalo $(-1,1)$ y tiene un máximo relativo en ese mismo intervalo.

Hoja 6

1. Estudia la continuidad de la función $f(x)=\frac{x^5-x^8}{1-x^6}$ y clasifica los tipos de discontinuidad.

solución: En $x=1$ discontinuidad evitable. En $x=-1$ discontinuidad no evitable, de primera especie, de salto infinito.

2. Expresar la función $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ como una función a trozos para conseguir que sea continua en $x=0$.

solución: $f(0)=1/2$

3. Determinar $a\ y\ b$ para que la función sea continua en $x=1$ y su gráfica pase por el origen de coordenadas.

$$f(x)=\begin{cases} 2x^2-ax+b & si \quad x<1 \\ \dfrac{\ln(x)-1}{2x+1-e^{2x}} & si \quad x\geq 1 \end{cases}$$

solución:

4. Estudia la continuidad y las asíntotas de $f(x)=\frac{x^3}{(x+1)^2}$.

solución: En $x=-1$ discontinuidad no evitable. Asíntota vertical en $x=-1$. Asíntota oblícua $y=x-2$.

5. Sea la ecuación $x^8+ax^2-2x=1$. Probar que:

a) si $a>2$, la ecuación admite al menos una solución menor que 1 .

b) si $a<2$, la ecuación admite al menos una solución mayor que 1 .

Hoja 7

1. Justificar razonadamente el dominio y la imagen de la función $f(x)=\sqrt{\cos(\frac{\pi\cdot x}{2})}$

2. Justificar razonadamente el dominio y la imagen de la función $f(x)=\log(sen(\frac{\pi\cdot x}{2}))$

3. Justificar razonadamente el dominio y la imagen de la función $f(x)=\sqrt{\log(1-x)}$

4. Justificar razonadamente el dominio y la imagen de la función $f(x)=\ln(\frac{|x-1|}{x-9})$

5. Justificar razonadamente el dominio y la imagen de la función $f(x)=\tan(\sqrt{x}-\sqrt{\frac{\pi}{2}})$

6. Justificar razonadamente el dominio y la imagen de la función $f(x)=\left|\frac{x-2}{x+1}\right|$

7. Justificar razonadamente el dominio y la imagen de la función $f(x)=\frac{1+|2x|}{|x-1|}$

8. Justificar razonadamente el dominio y la imagen de la función $f(x)=\log(\log(x-10))$

9. Justificar razonadamente el dominio y la imagen de la función $f(x)=\sqrt{1-\sqrt{x}}$

10. Justificar razonadamente el dominio y la imagen de la función $f(x)=\ln(|\ln(-x^2)|)$

11. Demostrar gráficamente que la función $f(x)=\cos(x)$ es biyectiva cuando consideramos el dominio $[0,\pi]$.

12. Demostrar gráficamente que la función $f(x)=\sqrt{x}$ es biyectiva en el codominio [0, ∞).

13. Demostrar analíticamente que la función $f(x)=e^{x+1}$ es biyectiva en $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}^+$. Obtener la función inversa.

Hoja 8

1. Justificar razonadamente el dominio y la imagen de la función $f(x)=\sqrt{sen(\frac{\pi\cdot x}{2})}$.

2. Justificar razonadamente el dominio y la imagen de la función $f(x)=\log(\cos(\frac{\pi\cdot x}{2}))$

3. Justificar razonadamente el dominio y la imagen de la función $f(x)=\sqrt{\log(x^2+2x-3)}$

4. Justificar razonadamente el dominio y la imagen de la función $f(x)=\ln(\frac{|2x-1|}{x+3})$

5. Justificar razonadamente el dominio y la imagen de la función $f(x)=\tan(\sqrt{\frac{\pi}{2}}-\sqrt{x})$

6. Justificar razonadamente el dominio y la imagen de la función $f(x)=\left|\frac{x+3}{x-1}\right|$

7. Justificar razonadamente el dominio y la imagen de la función $f(x)=\frac{1-|2x|}{|x+1|}$

8. Justificar razonadamente el dominio y la imagen de la función $f(x)=\log(\log(x+10))$

9. Justificar razonadamente el dominio y la imagen de la función $f(x)=\sqrt{\sqrt{x}-1}$

10. Justificar razonadamente el dominio y la imagen de la función $f(x)=\ln(|\ln(x^2)|)$

11. Demostrar gráficamente que la función $f(x)=sen(x)$ es biyectiva cuando consideramos el dominio $[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.

12. Demostrar gráficamente que la función $f(x)=x^4+2x^2-3$ no es biyectiva en el codominio $[-1,1]$.

13. Demostrar analíticamente que la función $f(x)=\ln(x-1)$ es biyectiva en $f:(1,+\infty)\rightarrow \mathbb{R}$. Obtener la función inversa.

Hoja 9

1. Calcula el valor de k para que se verifiquen los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{3k x^3 - 5x + 1}{10x^3 + 5}\right) = -1$

b) $\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + k x + 1} - x\right) = 2$

2. Da un ejemplo de una función que esté definida $\forall x \in \mathbb{R}$ y no tenga límite cuando x tiende a 2 .

3. Demostrar que la ecuación $7^x = 8x$ tiene alguna solución en el intervalo $[0,1]$.

4. Responde a las preguntas:

a) Si $f(a)=5$ y $f(b)=1$, ¿existe algún c perteneciente al intervalo $[a,b]$ tal que $f(c)=3$?

b) De una función se sabe que tiene tres raíces en el intervalo $[-4,2]$ y que toma valores de igual signo en los extremos. ¿Es esto posible? En caso afirmativo, construye un ejemplo.

5. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x}{x^2 + k}$ según el valor del parámetro k .

6. Demuestre que existe algún número real entre $0 \; y \; 1$ para el cual se verifica la siguiente igualdad:

$$x = \frac{1}{x^2 + 1}$$

Hoja 10

1. Determinar el valor de a para que la función $f(x)=\dfrac{x^2-a}{x^3+x^2+ax-12}$ presente una discontinuidad evitable en el punto $x=2$.

2. Probar que la ecuación $2x+sen(x)=1$ tiene alguna solución real.

3. Calcular los valores de los parámetros $a\ y\ b$ para que la función sea continua en todo $\mathbb{R}$.

$$f(x)=\begin{cases}\cos(x) & si \quad -\pi\le x\le 0\\ a+x^2 & si \quad 0<x<1\\ \dfrac{b}{x} & si \quad x\ge 1\end{cases}$$

Verifique las hipótesis el teorema de Bolzano en el intervalo $[-\pi,\pi]$. Aplicar el teorema para obtener una solución con una cifra decimal de precisión.

4. Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[1,9]$ y cumple que $f(1)=-5$ y $f(9)>0$, ¿podemos asegurar en estas condiciones que la función $g(x)=f(x)+3$ tiene al menos un cero en el intervalo $[1,9]$?

5. Mediante la definición de derivada, calcula la derivada de las siguientes funciones en el punto que se indica.

a) $f(x)=2x^2-6x+5$ en $x=-5$

b) $f(x)=x^3+2x-5$ en $x=1$

c) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ en $x=2$

d) $f(x)=\sqrt{x}$ en $x=3$

6. Dada la curva de ecuación $f(x)=2x^2-3x-1$, halla las coordenadas de los puntos de dicha curva en los que la tangente forma con el eje OX un ángulo de $45°$.

7. ¿Cuál es la velocidad que lleva un vehículo se mueve según la ecuación $e(t)=2-3t^2$ en el quinto segundo de su recorrido? El espacio se mide en metros y el tiempo en segundos.

Hoja 11

1. $\lim_{x\to 2} \frac{x^3+4x^2+4x}{x^3+3x^2-4}$

2. $\lim_{x\to 1} \left(\frac{3}{x^3-1}-\frac{1}{x-1}\right)$

3. $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+6}-3}{x^2-2x-3}$

4. $\lim_{x\to 3} \frac{x^3-9}{x+2}\cdot\frac{x^3+9}{x^3-3x}$

5. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{3x+1}{x^2}-\frac{3}{x}\right)$

6. $\lim_{x\to 2} \left(\frac{1}{\sqrt{x-2}}-\frac{1}{\sqrt{x^2-4}}\right)$

7. $\lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x-1}}{x-1}$

8. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{\sqrt{x+2}-2}$

9. Calcula los límites laterales de la siguiente función en los puntos $x=0$ y $x=1$.

$$f(x)=\begin{cases} e^x & si \quad x\le 0 \\ 1-2x & si \quad 0<x\le 1 \\ x^2 & si \quad x>1 \end{cases}$$

Hoja 12

1. Calcula los límites laterales de la siguiente función en el punto $x=0$.

$$f(x)=|x|-\frac{x}{x+1}$$

2. Calcula los límites laterales de la siguiente función en el punto $x=5$.

$$f(x)=|x-5|$$

3. Calcula a y b para que la siguiente función sea continua en todo su dominio.

$$f(x)=\begin{Bmatrix} x^2+1 & si & x\leq 1 \\ a\,x+3 & si & 1<x\leq 2 \\ b\,x^3-2 & si & x>2 \end{Bmatrix}$$

4. Estudia la continuidad de la siguiente función.

$$f(x)=\begin{Bmatrix} \frac{1}{x} & si & x<1 \\ \sqrt{x+1} & si & x\geq 1 \end{Bmatrix}$$

5. Estudia la continuidad de la siguiente función.

$$f(x)=\begin{Bmatrix} x^2-1 & si & x\leq 0 \\ 2x-3 & si & x>0 \end{Bmatrix}$$

6. Estudia la continuidad de la siguiente función.

$$f(x)=\begin{Bmatrix} \frac{2x^2+3x-2}{2x^2-5x+2} & si & x\neq\frac{1}{2} \\ \frac{-5}{3} & si & x=\frac{1}{2} \end{Bmatrix}$$

7. Determina a y b para que la función sea continua en todo su dominio.

$$f(x)=\begin{Bmatrix} sen(x) & si & x\leq 0 \\ -x^2+a\,x+b & si & x>0 \end{Bmatrix}$$

Hoja 13

1. Determina a y b para que la función sea continua en todo su dominio.

$$f(x)=\begin{cases} 3-ax^2 & si \quad x\leq 1 \\ \dfrac{2}{bx} & si \quad x>1 \end{cases}$$

2. Dada la función $f(x)=\begin{cases} -1 & si \quad x\leq 0 \\ 2x^3-1 & si \quad x>0 \end{cases}$ estudiar si verifica el teorema de Bolzano en el intervalo $[-1,1]$. En caso afirmativo, aplicar el teorema.

3. Demostrar que la ecuación $7^x=8x$ tiene alguna solución en el intervalo $[0,1]$.

4. Si $f(a)=5$ y $f(b)=1$, ¿existe algún valor $c\in[a,b]$ tal que $f(c)=3$?

5. Una función tiene tres raíces en el intervalo $[-4,2]$ y toma valores de igual signo en los extremos. ¿Es esto posible? En caso afirmativo, construye un ejemplo.

6. Estudiar la continuidad de la función $f(x)=\dfrac{x}{x^2+k}$ para distintos valores del parámetro k .

7. Estudia la continuidad de $f(x)=e^{\frac{1}{x-1}}$.

8. Estudia la continuidad de $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x-1}$.

9. Estudia la continuidad de $f(x)=\sqrt{x^2-1}$.

10. Estudia la continuidad de $f(x)=\begin{cases} 1-x & si \quad x\leq 0 \\ e^{-x} & si \quad x>0 \end{cases}$.

Hoja 14

1. $\lim_{x \to 2} \frac{-x^4+4x^3-16x+16}{x^3-3x^2+4}$

2. $\lim_{x \to 1} \frac{x-\sqrt{2x^2-1}}{x-1}$

3. $\lim_{x \to 0} \frac{3-\sqrt{x+9}}{-5+\sqrt{x+25}}$

4. $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-1}{\sqrt{9x^4-x}}$

5. $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2}{x-1}-\frac{x^3}{x+1}\right)$

6. $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{4x^2+x}-2x\right)$

7. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-2x}{2x^2-8}$

8. $\lim_{x \to -2} \frac{x^2-2x}{2x^2-8}$

9. Calcula los límites laterales de $f(x)=(3x-1)^{\frac{5}{x-1}}$ en $x=1$.

10. Calcula los límites laterales de $f(x)=\left(\frac{x+1}{x^2+2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$ en $x=2$.

Hoja 15

1. Estudia la continuidad de la siguiente función.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{x^2+x} & si \quad x\le 0 \\ 2^{\frac{1}{x^2-3x}} & si \quad 0<x\le 3 \\ \dfrac{x-3}{x^2-16} & si \quad x>3 \end{cases}$$

2. Estudia la continuidad de la siguiente función.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{x^2-1} & si \quad x\le -1 \\ 4^{\frac{1}{x^2-x-2}} & si \quad -1<x<2 \\ \dfrac{x-2}{x^2-3x} & si \quad x\ge 2 \end{cases}$$

3. Determina a para que se cumpla $\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+a}{x-a}-\dfrac{x^2-a}{x+a}\right)=6$.

4. Determina a y b para que se cumpla $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+ax+b}{x^2-4}=2$.

5. Determina a para que la función $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x^2-x-a}$ sea discontinua en $x=3$.

6. Determina a para que la función $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{x^3-2x^2+x+a}$ sea discontinua en $x=2$.

7. Justifica que la siguiente ecuación tiene alguna solución positiva.

$$x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x=1$$

Hoja 16

1. Sea $f(x)$ una función tal que $|f(x)| \leq |x|$ para cualquier valor de x del dominio de la función. Demuestra que $f(0)=0$ y que $f(x)$ es continua en $x=0$.

2. Demuestra que las gráficas de las funciones $f(x)=\log_2(x)$ y $g(x)=e^{-x}$ se cortan en algún punto. Obtener dicho punto con precisión de una cifra decimal.

3. Dada la función $f(x)=x^3+2x-8$, demuestra que existe algún número $c \in (0,3)$ tal que $f(c)=2$.

4. Prueba que la ecuación $x^5-3x^2-4=0$ tiene, al menos, una raíz y encuéntrala con precisión de una cifra decimal.

5. Demuestra que si $f(x)$ es una función continua en $[0,1]$, tal que $f(0)<0$ y $f(1)>0$, entonces la función $g(x)=\dfrac{f(x)}{3x^2+5}$ se anula, al menos, en un punto del intervalo $(0,1)$.

6. La función $f(x)=tg(x)$ toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo $[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$ y sin embargo no se anula en él. ¿Contradice este resultado el teorema de Bolzano? Justifica tu respuesta.

7. Considera la función $f(x)=\begin{Bmatrix} x^2+x+b & si & x<0 \\ a \cdot e^{b \cdot x} & si & x \geq 0 \end{Bmatrix}$. Calcula a y b para que la función sea continua en toda la recta real.

8. Determina los valores de a , b , c y d para que la función $f(x)$ sea continua en toda la recta real.

$$f(x)=\begin{Bmatrix} -x^2+ax+b \quad si \quad x<0 \\ c \cdot x \quad si \quad 0 \leq x \leq 1 \\ (x-1)^2+d \cdot (x-1)+1 \quad si \quad x>1 \end{Bmatrix}$$

Hoja 17

1. Estudia la continuidad de la función $f(x)=\left\{\begin{matrix} |x^2+1| & si \quad x\leq 1 \\ 2x-2 & si \quad x>1 \end{matrix}\right\}$.

2. Demuestra que la función $f(x)=\left\{\begin{matrix} \frac{1}{x}-\frac{3}{3x-x^3} \quad si \quad x\neq 0 \\ 0 \quad si \quad x=0 \end{matrix}\right\}$ es continua en el intervalo $[-1,1]$.

3. Demuestra que la ecuación $x^{2009}+x+1=0$ tiene, al menos, una solución real.

4. ¿Puede ser la imagen de un intervalo abierto por una función continua, un intervalo cerrado? Razona la respuesta mediante un ejemplo.

5. Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones continuas en el intervalo $[a,b]$ y que cumplen $f(a)<g(a)$ y $f(b)>g(b)$. Demuestra que existe, al menos, un punto $c\in(a,b)$ en el que se verifica $f(c)=g(c)$.

6. Un comerciante vende un determinado producto y por cada unidad de dicho producto cobra la cantidad de 5 euros.

Si se le encargan más de 10 unidades, disminuye el precio por unidad y por cada x unidades cobra la siguiente cantidad:

$$f(x)=\left\{\begin{matrix} 5x \quad si \quad 0<x\leq 10 \\ \frac{5x}{\sqrt{ax^2-899}} \quad si \quad x>10 \end{matrix}\right\}$$

Halla a para que el precio varíe de forma continua según el número de unidades que se compren.

Hoja 18

1. Demuestra, mediante la definición formal de límite, que $\lim_{x \to 3} (2x-5) = 1$.

2. Demuestra, mediante la definición formal de límite, que $\lim_{x \to 2} (4x-5) = 3$.

3. Demuestra, mediante la definición formal de límite, que $\lim_{x \to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$.

4. Demuestra, mediante la definición formal de límite, que $\lim_{x \to 3} (x+2) = 5$.

5. Demuestra, mediante la definición formal de límite, que $\lim_{x \to 1} (2x+1) = 3$.

6. Demuestra, mediante la definición formal de límite, que $\lim_{x \to 4} (3x-6) = 6$.

7. Demuestra, mediante la definición formal de límite, que $\lim_{x \to 3} \frac{3x-2}{2} = 2$.

8. Demuestra, mediante la definición formal de límite, que $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$.

9. Demuestra, mediante la definición formal de límite, que $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

10. Demuestra, mediante la definición formal de límite, que $\lim_{x \to 1} \frac{-1}{x-1} = -\infty$.

Hoja 19

1. Demuestra, mediante la definición formal de límite, que $\lim_{x \to \infty} \frac{x+1}{x} = 1$.

2. Demuestra, mediante la definición formal de límite, que $\lim_{x \to -\infty} \frac{1-x}{x} = -1$.

3. Demuestra, mediante la definición formal de límite, que $\lim_{x \to +\infty} (8x+2) = +\infty$.

4. Demuestra, mediante la definición formal de límite, que $\lim_{x \to -\infty} (x+3) = -\infty$.

Hoja 20

1. Sabiendo que $\lim_{x\to 0}\frac{x\cos(2x)+b\,sen(x)}{4x^2}$ es finito, calcula b y el valor del límite.

2. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x)=|x^2-2x|$ y $g(x)=\ln(x)$.
a) Realiza un esbozo de ambas gráficas sobre los mismos ejes.

b) Utiliza el Teorema de Bolzano para encontrar, con precisión de una cifra decimal, el punto de corte de ambas gráficas en el intervalo $[2,3]$.

3. Calcula $\lim_{x\to 1^+}(2-x)^{\frac{1}{1-x}}$.

4. Estudia la continuidad de $f(x)=\begin{cases} a\cdot\frac{2^x-1}{x} & si \quad x<0 \\ \frac{\cos(x)}{x^2+1} & si \quad x\geq 0\end{cases}$ en todo $\mathbb{R}$ y obtener el valor de a para que la función sea continua en $x=0$.

5. Calcula $\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{1}{3-x}\right)^{\frac{1}{(2-x)^2}}$.

6. Sea $f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}$.

a) Obtener de manera razonada el dominio y la imagen de la función. Realiza un esbozo de la función.

b) Justificar, de manera razonada, por qué la función no admite inversa en su dominio maximal.

7. a) Calcula a y b para que función $f(x)=\frac{ax^2+x+b}{x^2-4}$ tenga una asíntota horizontal en $y=-1$ y pase por el punto $(0,1)$.

b) Enuncia el Teorema de Bolzano, y utilízalo para encontrar, con precisión de una cifra decimal, el punto de corte de las gráficas $g(x)=e^x$ y $h(x)=-x$ en el intervalo $[-1,0]$.

8. a) Calcula $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-5x+4}-x\right)$.

b) Determinar, de manera razonada, el dominio de $f(x)=\sqrt{x^2-5x+4}-x$.

Hoja 21

1. a) Demostrar que la función $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ definida en el dominio [$1,\infty$) admite inversa.

b) Obtener la función inversa $f^{-1}(x)$ y comprobar que se cumplen las igualdades: $(f\circ f^{-1})(x)=x$ y $(f^{-1}\circ f)(x)=x$

2. a) Determinar k para que la función sea continua en $x=0$.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+1-e^x}{2x+1-e^{2x}} & si \quad x<0 \\ (2x-k)^2 & si \quad x\geq 0 \end{cases}$$

b) Indica un dominio que permita que la función $f(x)=\cos(x)$ admita inversa. Demuestra que, en ese dominio que propones, la función es biyectiva.

3. a) Utiliza el Teorema de Bolzano para encontrar, con precisión de una cifra decimal, el punto de corte de las funciones $f(x)=3x^5-10x^4+10x^3+3$ y $g(x)=e^x$ en el intervalo $[-1,0]$.

b) Demostrar que la función $g(x)=e^x$ es biyectiva.

4. Sea $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ una función definida en el dominio [$1,\infty$). Su inversa es $f^{-1}(x)=\sqrt{x^2+1}$. Esboza gráficamente ambas funciones y comprueba, geométricamente, que ambas gráficas son simétricas respecto a la recta $y=x$.