Problemas – Tema 1

Enunciados de problemas de repaso de 1ºBachillerato

Hoja 1

1. Dados tres números reales cualesquiera $r_1, r_2\ y\ r_3$, hallar el numero real x que minimiza la función $D(x)=(r_1-x)^2+(r_2-x)^2+(r_3-x)^2$.

solución: $x=\dfrac{r_1+r_2+r_3}{3}$ es un mínimo absoluto de la parábola.

2. Sabiendo que $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{a}{\ln x}\right)$ es finito, calcula a y el valor del límite (ln denota el logaritmo neperiano).

solución: $a=1$, $límite=1/2$

3. Halla las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en un triangulo isósceles de 6 metros de base (el lado desigual) y 4 metros de alto.

solución: $base=3\,metros\ ,\ altura=2\,metros\,(máximo\ absoluto\ del\ área)$

4. Sea la función definida por $f(x)=x\,e^{\frac{1}{x}}$ para $x\geqslant -1, x\neq 0$.

a) Calcula los límites laterales de la función en $x=0$.

b) Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de la función.

solución: a) 0, $+\infty$ b) Asíntota vertical en $x=0$ y asíntota oblicua $y=x+1$

5. Sea $f(x)=\begin{cases}\dfrac{sen\,x}{x}+2 & si\ \ x\neq 0\\ k & si\ \ x=0\end{cases}$

a) ¿Hay algún valor de k para el cual $f(x)$ sea continua en $x=0$?

b) ¿Hay algún valor de k para el cual $f(x)$ sea derivable en $x=0$?

c) Determinar sus asíntotas.

solución: a) $k=3$ b) $k=3$ c) Asíntota horizontal $y=2$

Hoja 2

1. Sea $f(x)=a x^3+b x^2+c x+d$ un polinomio que cumple $f(1)=0$, $f'(0)=2$, y tiene dos extremos relativos para $x=1$ y $x=2$.

a) Determinar $a, b, c \ y \ d$.

b) ¿Son máximos o mínimos los extremos relativos?

solución: a) $a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{-3}{2}$, $c=2$, $d=\frac{-5}{6}$ b) $x=1$ es máximo, $x=2$ es mínimo

2. Sea la función $f(x)=2x+sen(2x)$.

a) Determinar si tiene asíntotas de algún tipo.

b) Estudiar su monotonía y la existencia de extremos relativos.

solución:

a) No tiene asíntotas.

b) Creciente, sin máximos ni mínimos relativos, con puntos de inflexión en $x=\frac{\pi}{2}+\frac{k\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$

3. Se considera la función $f(x)=\frac{1}{4-x^2}$.

a) Indicar el dominio de definición de la función y hallar sus asíntotas.

b) Hallar los extremos relativos de la función y sus intervalos de concavidad y convexidad.

c) Dibujar la gráfica de $f(x)$ y hallar su máximo y su mínimo absolutos en el intervalo $[-1,1]$.

solución:

a) $Dom_f=\mathbb{R}-\{-2,2\}$

b) Asíntotas verticales en $x=-2$ y $x=2$. Asíntota horizontal en $y=0$. No hay puntos de inflexión. La función es convexa para $x<-2$, cóncava para el intervalo $(-2,2)$, y vuelve a ser convexa para $x>2$.

c) En el punto $(0,\frac{1}{4})$ existe un mínimo absoluto.

4. a) Si es posible, dibujar de forma clara la gráfica de una función continua en el intervalo [0, 4] que tenga al menos un máximo relativo en el punto (2, 3) y un mínimo relativo en el punto (3, 4).

b) Si la función fuera polinómica, ¿cuál ha de ser como mínimo su grado?

solución: La función tiene, al menos, cuatro extremos, por lo que el grado del polinomio tiene que ser cinco como mínimo. De esta forma, al derivar el polinomio, tendremos al menos los cuatro extremos como solución de igualar la derivada a cero (pendiente cero).

Hoja 3

1. Expresa en función de x y simplifica.

$$\frac{sen(2\pi-x)-\cos(-x)sen(\frac{\pi}{2}+x)+1}{sen(\pi-x)}\cdot(1+senx)$$ **solución:** $-\cos^2(x)$

2. a) Determinar los extremos relativos de la función $f(x)=x^2-4x+2$. Dibujar su gráfica.

b) Hallar las ecuaciones de las dos rectas tangentes a la gráfica de $f(x)$ que pasan por el punto $P(3,-5)$.

solución:

a) Parábola con mínimo absoluto $A(2,-2)$ b) $y+1=-2(x-1)$, $y-7=6(x-5)$

3. Sea $P(x)$ un polinomio de grado 4 tal que:

- $P(x)$ es una función par.
- Dos de sus raíces son $x=1$ y $x=\sqrt{5}$.
- $P(0)=5$.

Se pide:

a) Hallar sus puntos de inflexión.

b) Dibujar su gráfica.

solución:

a) El polinomio es $P(x)=x^4-6x^2+5$. Puntos de inflexión en $(-1,0)$ y $(1,0)$.

b) Máximo $(0,5)$, Mínimos en $(-\sqrt{3},-4)$ y $(\sqrt{3},-4)$, cortes eje OX $(-\sqrt{5},0)$, $(-1,0)$, $(1,0)$, $(\sqrt{5},0)$

4. Calcular las edades actuales de una madre y sus dos hijos sabiendo que hace 14 años la edad de la madre era 5 veces la suma de las edades de los hijos en aquel momento, que dentro de 10 años la edad de la madre será la suma de las edades que los hijos tendrán en ese momento y que cuando el hijo mayor tenga la edad actual de la madre, el hijo menor tendrá 42 años.

solución: 44 años, 18 años y 16 años

5. Sea la función definida por $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$ para $x>0$, $x\neq 1$.

a) Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de la función.

b) Calcula la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x=e$.

solución: a) Asíntota vertical en $x=1$ b) Recta tangente $y=e$. Recta normal $x=e$.

Hoja 4

1. Sea la función definida por $f(x)=\frac{k}{(x-a)(2x-1)}$ para $x\neq a$ y $x\neq 1/2$.

a) Halla a y k sabiendo que la gráfica de $f(x)$ pasa por el punto $(0,2)$ y que la recta $x=2$ es una asíntota de dicha gráfica.

b) Para $k=4$ y $a=2$, halla los extremos relativos de $f(x)$ (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) y sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

solución:

a) $a=2$, $k=4$

b) Máximo relativo en $(\frac{5}{4},\frac{-39}{2})$. Estrictamente creciente para $x<\frac{5}{4}$ (sin incluir $x=\frac{1}{2}$ donde hay una asíntota vertical). Estrictamente decreciente para $x>\frac{5}{4}$ (sin incluir $x=2$ donde hay una asíntota vertical).

2. Un rectángulo está inscrito en un semicírculo de $\sqrt{5}\ cm$ de radio, de forma que uno de sus lados está contenido en el diámetro del semicírculo y el lado opuesto tiene sus vértices sobre la semicircunferencia. Calcula las dimensiones del rectángulo sabiendo que es el de mayor perímetro posible.

solución: $longitud=4\,cm\ ,\ altura=1\,cm$

3. Considera la función $f(x)=x^3+a x^2+b x+c$. Determina $a,b\ y\ c$ sabiendo que la recta normal a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x=0$ es $y+x+3=0$ y que el punto de inflexión tiene abscisa $x=1$.

solución: $a=-3$, $b=1$, $c=-3$

4. Sabiendo que $\lim_{x\to 0}\frac{x\cos(x)+b\,sen(x)}{x^3}$ es finito, calcula b y el valor del límite.

solución: $b=-1$, $límite=\frac{-1}{3}$

5. Sea $f:(-\infty,1)\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\begin{cases} x+2e^{-x} & si\quad x\leqslant 0 \\ a\sqrt{b-x} & si\quad 0<x<1\end{cases}$

a) Determina a y b sabiendo que $f(x)$ es derivable en todo su dominio.

b) Halla la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=0$.

solución:

a) $a=2$, $b=1$ b) Recta tangente $y=-x+2$, recta normal $y=x+2$

Hoja 5

1. Sea la función definida por $g(x)=\frac{mx^3}{(x-n)^2}$ $x\neq n$

a) Halla m y n sabiendo que la recta $y=2x-4$ es una asíntota de la gráfica de $g(x)$.

b) Determina si la gráfica de $g(x)$ es simétrica respecto al origen.

solución: a) $m=2,\ n=-1$ b) No es simétrica respecto al origen.

2. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$. Se sabe que un punto de inflexión de la gráfica tiene abscisa $x=1$ y que $f(x)$ tiene un mínimo relativo en $x=2$ de valor -9 . Calcula $a,\ b\ y\ c$.

solución: $a=-3,\ b=0\ ,\ c=-5$

3. Un alambre de 10 metros de longitud se divide en dos trozos. Con uno de ellos se forma un triángulo equilátero y con el otro un cuadrado. Halla la longitud de dichos trozos para que la suma de las áreas sea mínima.

solución: $\frac{90}{9+4\sqrt{3}}\ m$, $\frac{40\sqrt{3}}{9+4\sqrt{3}}\ m$

4. Sea $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\frac{2\,lnx}{x^2}$ (donde ln denota el logaritmo neperiano).

a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

b) Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f.

solución:

a) Estrictamente creciente en el intervalo $(0,\sqrt{e})$, decreciente en $(\sqrt{e},+\infty)$, máximo relativo en el punto $\left(\sqrt{e},\frac{1}{e}\right)$.

b) Asíntota vertical $x=0$, Asíntota horizontal $y=0$, corte con la asíntota horizontal en $(1,0)$.

5. Calcular la base y la altura del triángulo isósceles de perímetro 8 y área máxima.

solución: base = $\frac{8}{3}$, atura = $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

Hoja 6

1. Se desea construir un depósito cilíndrico cerrado de área total igual a 54 m^2. Determina el radio de la base y la altura del cilindro para que éste tenga volumen máximo.

solución: $r=\frac{3}{\sqrt{\pi}}\ m$, $h=\frac{6}{\sqrt{\pi}}\ m$

2. Hallar a, b y c de modo que la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ alcance en $x=1$ un máximo relativo de valor 2, y tenga en $x=3$ un punto de inflexión.

solución: $a=-9, b=15, c=-5$

3. Sea $A(1,1)$ y $B(-1,1)$ dos puntos del plano.

a) Determinar las ecuaciones de todas las circunferencias que pasan por los puntos A y B razonando donde están situados sus centros.

b) De entre las circunferencias del apartado anterior hallar el centro y el radio de la que es tangente a la recta $y=x$.

solución: a) $x^2+y^2-2ay+2a-2=0$, centro $C(0,a)$ b) $C(0,2)$, $r=\sqrt{2}$

4. Se considera una varilla AB de longitud 1. El extremo A de esta varilla recorre completamente la circunferencia de ecuación $x^2+y^2-4x-2y+1=0$. La varilla se mantiene en todo momento tangente a dicha circunferencia.

a) Determinar el lugar geométrico descrito por el extremo B de la varilla.

b) Obtener la ecuación cartesiana de dicho lugar geométrico.

solución:

a) Circunferencia concéntrica con la dada y radio CB, siendo el centro $C(2,1)$.

b) $x^2+y^2-4x-2y=0$, $C(2,1)$, $r=\sqrt{5}$

5. Sea $f:[\frac{1}{e},4]\rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\begin{cases} x-\ln(x)+a & si \quad \frac{1}{e}\leqslant x\leq 2 \\ bx+1-\ln(2) & si \quad 2<x\leq 4 \end{cases}$, donde ln denota la función logaritmo neperiano.

a) Calcula los valores de a y b para que f sea derivable en el intervalo $(\frac{1}{e},4)$.

b) Para $a=0$ y $b=\frac{1}{2}$ halla los extremos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

solución: a) $a=0$, $b=\frac{1}{2}$ b) máximo absoluto $(4,3-\ln(2))$, mínimo absoluto $(1,1)$

Hoja 7

1. a) Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano tales que su distancia al punto $(4,0)$ es el doble de su distancia a la recta $x=1$.

b) Comprobar que el anterior lugar geométrico es una cónica. Indicar el tipo de cónica que es y hallar sus focos.

solución: a) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ b) Hipérbola de focos $(-4,0)$, $(4,0)$

2. Los vértices de un triángulo son $A(-2,-1)$, $B(7,5)$ y $C(x,y)$.

a) Calcular el área del triángulo en función de x, y .

b) Encontrar el lugar geométrico de los puntos (x,y) tales que la anterior área sea $36u^2$.

solución: a) $\frac{3}{2}|2\mathrm{x}-3\mathrm{y}+1|$ b) $2x-3y-23=0$

3. Sea la parábola $x^2=4\mathrm{y}$. Sean u y v las rectas tangentes a la parábola en los puntos $P(a,0)$ y $Q(b,0)$.

a) Hallar las coordenadas del punto R de intersección de u y v .

b) Hallar la relación entre a y b para que las rectas u y v sean perpendiculares.

c) Probar que en el caso del apartado anterior, el punto R está en la directriz de la parábola.

solución: a) $R(a+b,\frac{ab}{2})$ b) $a\cdot b=-4$ c) $d: y=-2$, $R(a+b,-2)\in d$

4. Determinar la ecuación cartesiana de los puntos del plano tales que la suma de los cuadrados de sus distancias a los puntos $(0,0)$ y $(1,1)$ es igual a 9 . Si se trata de una curva cerrada, calcular el área que encierra.

solución: Circunferencia de centro $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ y radio $r=2$. Área $4\pi \ u^2$

5. Sea la función $f:(0,+\infty)\to \mathbb{R}$ definida por $f(x)=\frac{1}{x}+\ln(x)$.

a) Halla los extremos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) en el intervalo $[\frac{1}{e},e]$.

b) Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=e$.

solución: a) Máximo absoluto en $(\frac{1}{e},e-1)$. Mínimo absoluto en $(1,1)$ b) $y=x(\frac{-1}{e^2}+\frac{1}{e})+\frac{2}{e}$

Hoja 8

1. Sabiendo que una función tiene como derivada $f'(x)=(x-4)^2(x^2-8x+7)$.

a) Hallar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$.

b) Hallar los máximos y mínimos relativos de $f(x)$.

c) ¿Es el punto $x=4$ un punto de inflexión de $f(x)$?. Justicar razonadamente la respuesta.

solución:

a) Creciente en $(-\infty,1)\cup(7,+\infty)$. Decreciente en $(1,7)$.

b) Máximo en $(1,\frac{162}{5})$. Mínimo en $(-7,\frac{162}{5})$.

c) Sí es un punto de inflexión: paso de cóncava hacia arriba a convexa (cóncava hacia abajo).

2. Sea la función definida por $f(x)=\frac{2x^2}{(x+1)(x-2)}$ para $x\neq-1,\ x\neq2$

a) Estudia y calcula las asíntotas de la gráfica de $f(x)$.

b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$.

c) Calcula, si existe, algún punto de la gráfica de $f(x)$ donde ésta corta a la asíntota horizontal.

solución:

a) Asíntotas verticales $x=-1$, $x=2$. Asíntota horizontal $y=2$.

b) Estrictamente decreciente para $x<-4$. Estrictamente creciente en el intervalo $(-4,0)-\{-1\}$. Estrictamente decreciente en $(0,+\infty)-\{2\}$.

c) $(-2,2)$

3. Sea la función $f:[1,e]\rightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^2-8\ln(x)$ donde ln denota la función logaritmo neperiano.

a) Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función.

b) Calcula los extremos absolutos y relativos de la función (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

c) Estudia los intervalos de concavidad y de convexidad.

solución:

a) Estrictamente decreciente en [1, 2). Estrictamente creciente en $(2,e)$.

b) Máximo absoluto en $(1,1)$. Mínimo absoluto en $(2,4-8\cdot\ln(2))$.

c) Cóncava hacia arriba en [1, e).

Hoja 9

1. Resuelve:

$$\begin{cases} sen^2 x+\cos^2 y=\frac{3}{4} \\ \cos^2 x-sen^2 y=\frac{1}{4} \end{cases}$$

solución:

$$x=\frac{\pi}{6}+k\pi\ ,\quad -\frac{\pi}{6}+k\pi\ ,\quad k\in\mathbb{Z}$$

$$y=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\ ,\quad k\in\mathbb{Z}$$

2. Resuelve:

$$\begin{cases} cosx\cdot cosy=\frac{3}{4} \\ senx\cdot seny=\frac{1}{4} \end{cases}$$

solución:

$$x=\frac{\pi}{6}+k\pi\ ,\quad y=\frac{\pi}{6}+k\pi\ ,\quad k\in\mathbb{Z}$$

$$x=\frac{-\pi}{6}+k\pi\ ,\quad y=\frac{-\pi}{6}+k\pi\ ,\quad k\in\mathbb{Z}$$

3. Dadas las rectas:

$$r:\quad ax-2y+7=0$$

$$s:\quad \frac{x+1}{b}=\frac{y}{2}$$

Halla a y b sabiendo que las rectas son perpendiculares y que r pasa por el punto $P(-1,2)$.

solución: $a=3$, $b=-3$

Hoja 10

1. Sea la función definida por $f(x)=\frac{3x^4+1}{x^3}$ para $x\neq 0$.

a) Estudia las asíntotas de la gráfica de la función.

b) Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, y los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

solución:

a) Asíntota vertical en $x=0$. Asíntota oblícua en $y=3x$.

b) Creciente en $(-\infty,-1)$. Decreciente en $(-1,1)$, sin incluir $x=0$ donde la función no está definida. Creciente en $(1,+\infty)$. Máximo en $(-1,-4)$. Mínimo en $(1,4)$.

2. Calcular los siguientes límites.

a) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}$

b) $\lim_{x\to\infty} x\left[arctg\left(e^x\right)-\frac{\pi}{2}\right]$

solución: a) 1 b) 0

3. Calcular los siguientes limites.

a) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{4x}\right)$

b) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(\cos 3x)}{\ln(\cos 2x)}\right)$

solución: a) $\frac{1}{8}$ b) $\frac{9}{4}$

Hoja 11

1. Sea la circunferencia de ecuación $x^2+y^2-2x-4y+1=0$.

a) Hallar su centro, su radio y dibujarla.

b) Hallar el punto de la curva, de abscisa cero, más alejado del origen; hallar también la recta tangente a la curva en ese punto.

c) Hallar las ecuaciones de las tangentes trazadas desde el punto $P(3,0)$ razonando la respuesta.

solución:

a) Centro $C(1,2)$, radio $r=2$.

b) $(0,2+\sqrt{3})$, $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+2+\sqrt{3}$

c) Dos rectas tangentes: $x=3, y=0$

2. Dada la función $f(x)=x^2\exp(x^2-1)$ escribe la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x=-1$.

solución: $y=-4x-3$

3. Dada la función $f(x)=\frac{x(2x+1)}{\sqrt{x+2}}$ escribe la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa x = 2.

solución: $y=\frac{31}{8}x-\frac{11}{4}$

4. Estudia el crecimiento y curvatura de la función $f(x)=\frac{x^4}{12}-\frac{x^3}{9}-x^2+1$. Estudia sus máximos, mínimos y puntos de inflexión.

solución: decreciente en $(-\infty,-2)\cup(0,3)$, creciente en $(-2,0)\cup(3,+\infty)$. Mínimo en $(-2,-\frac{7}{9})$, mínimo en $(3,-\frac{17}{4})$. Máximo en $(0,1)$. Puntos de inflexión en $(-1{,}12\,,0{,}03)$, $(1{,}79\,,1{,}99)$.

Hoja 12

1. Determina los parámetros $a, b, c \ y \ d$ para que la función $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ tenga un punto de inflexión en $P(-2,6)$, con tangente en él paralela a la recta $8x+y+10=0$, y tome además el valor -2 para $x=0$.

solución: $a=1, b=6, c=4, d=-2$

2. Determina los intervalos de concavidad y convexidad indicando si existen puntos de inflexión y calculándolos.

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2 & si \quad x\leqslant 0 \\ 2^{-x+1} & si \quad x>0 \end{cases}$$

solución: $f(x)$ siempre es cóncava. En $x=0$ hay un punto anguloso (no un punto de inflexión).

3. Un jardinero desea construir un jardín con forma de sección circular de 40 metros de perímetro. ¿Cuál debe ser el radio para que la superficie sea máxima?

solución: 10 metros.

4. El lado de un cuadrado tiene de longitud 4 metros. Entre todos los cuadrados inscritos en el cuadrado dado, halla el de área mínima.

solución: lado $2{,}83\, metros$. Área $8\,m^2$

5. Calcula la ecuación de las asíntotas.

$$f(x)=\frac{1-2x^2}{x^2-1}$$

solución: $x=-1, x=1, y=-2$

Hoja 13

1. Calcula la ecuación de las asíntotas.

$$f(x)=\frac{\sqrt{4x^2+1}}{2x+2}$$

solución: $x=-1, y=-1, y=1$

2. Un depósito abierto de latón con base cuadrada y capacidad para 4000 litros, ¿qué dimensiones debe tener para que su superficie sea mínima (menor coste de fabricación)?

solución: $base\ x=2\ metros, altura\ y=1\ metro$

3. Una huerta tiene actualmente 24 árboles, que producen 600 frutos cada uno. Se estima que por cada árbol adicional, la producción de cada árbol disminuye en 15 frutos. ¿Cuál debe ser el número total de árboles que debe tener la huerta para que la producción sea máxima? ¿Cuál será esa producción?

solución: 32 árboles, 15360 frutos totales

4. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide $1\,dm$. Hacemos girar el triángulo alrededor de uno de sus catetos. Determina la longitud de los catetos para que el cono engendrado con el giro tenga volumen máximo.

solución: $\frac{\sqrt{3}}{3}dm,\quad \frac{\sqrt{6}}{3}dm$

Hoja 14

1. Calcula el límite

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2 - sen^2 x}{x^4}\right)$$

solución: $\frac{1}{3}$

2. Calcula el límite

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\cos^2 x - 1}{x^2}\right)$$

solución: -1

3. Calcula el límite

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{lnx}{\sqrt[3]{x}}\right)$$

solución: 0

4. Calcula el límite

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1 - cosx}{tgx}\right)$$

solución: 0

5. Calcular la base y la altura del triángulo isósceles de perímetro 8 unidades y área máxima.

solución: $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

Hoja 15

1. Un mayorista vende billetes de avión a agencias de viajes. A una primera agencia A le vende 10 billetes nacionales, 10 billetes de países comunitarios y otros 10 billetes a países no europeos y le cobra 12000 euros. También le vende a una agencia B 10 billetes nacionales y 20 a países no europeos y le cobra 13000. Y a una agencia C le vende 10 billetes nacionales y 10 billetes comunitarios y le cobra 7000 euros. ¿Cuál es el precio de cada billete?

solución: nacionales 300 euros, comunitarios 400 euros, no europeos 500 euros

2. El precio de un libro, una calculadora y un estuche es 57 euros. Sabiendo que el precio del libro es el doble que el de la calculadora y el estuche juntos. ¿Es posible calcular el precio del libro? ¿Y el de la calculadora y el estuche?

3. Entre todos los rectángulos de perímetro $12\,cm$, ¿cuál tiene diagonal menor? ¿Cuánto mide ésta?

solución: $lado\,3\,cm$, diagonal menor $3\cdot\sqrt{2}$

4. Se ha de construir un gran depósito cilíndrico de $81\pi m^3$ de volumen. La superficie lateral ha de ser construida con un material que cuesta 30 € el metro cuadrado y las dos bases con un material que cuesta 45 € el metro cuadrado.

a) Determina la relación que hay entre el radio r de las bases circulares y la altura h del cilindro, y expresa el coste $C(r)$ del material necesario para construir este depósito en función únicamente de r.

b)¿Qué dimensiones (radio y altura) ha de tener el depósito para que el coste de los materiales necesarios para construirlo sea el mínimo posible? ¿Cuál será, en este caso, el coste del material?

solución: a) $C(r)=\frac{4860\pi}{r}+90\pi r^2$ b) $radio\,3\,m\,,\,altura\,9\,m\,,\,7634{,}07\,€$

5. Demuestra que $e^x>x+1$ para todo x positivo.

Hoja 16

1. Se sabe que la función $f(x)=x^3+ax+b$ corta a su función derivada en $x=1$ y que, además, en dicho punto la función tiene un extremo.

a) Determinar $a\ y\ b$.

b) En $x=1$ ¿hay un máximo o un mínimo?

c) ¿Existe algún otro extremo?

solución: a) $a=-3, b=2$ b) es un mínimo c) En $x=-1$ hay un máximo relativo

2. Expresa el número 60 como una suma de tres enteros positivos de forma que el mayor sea doble del menor y su producto sea máximo. Determinar el valor de dicho producto.

solución: $13, 21, 26.\ Producto\ 7098$.

3. Representa $y=x^3-4x$

4. Representa $y=\frac{1}{x^2-1}$

5. Representa $y=x^4-6x^2+5$

6. Representa $y=\sqrt{x^2-9}$

7. Representa $y=\frac{(x-2)^2}{x-3}$

8. Representa $y=(x-1)e^{-x}$

Hoja 17

1. Representa $y=\frac{4x}{x^2+1}$

2. Representa $y=\frac{x^2+|x|}{x^2-|x|}$

3. Representa $y=\frac{\sqrt{4x^2+1}}{2x+2}$

4. Calcula el límite $\lim_{x\to\infty}\left(x\sqrt{\left(4-\frac{1}{x}\right)}-2\right)$

5. Sea

$$f(x)=\begin{Bmatrix} -x^3+5x^2 & si & 0\leqslant x<3 \\ -x^2+12x-9 & si & 3\leq x\leq 5 \\ 2x+16 & si & 5<x\leqslant 10 \end{Bmatrix}$$

a) Estudia la continuidad y la derivabilidad de la función.

b) Calcula los puntos de inflexión.

solución: a) continua en su dominio, derivable en $(0,3)\cup(3\,10)$. b) $(\frac{5}{3},\frac{250}{27})$

Hoja 18

1. Calcula el valor de $a\, y\, b$ para que la función $f(x)=a\cdot\ln(x)+b\cdot x^2+x$ tenga extremos en los puntos $x=1, x=2$. ¿Qué tipo de extremos son?

solución: $a=\frac{-2}{3}$ $, b=\frac{-1}{6}$, $x=1\, mínimo$, $x=2\, máximo$

2. ¿Qué clase de triángulo determinan los puntos $A(-1,-2), B(0,5), C(3,1)$? Halla la mediana del lado $\overline{BA}$ (unión del punto medio del lado con el vértice opuesto? Calcula su área.

solución: isósceles (dos lados iguales) y rectángulo en vértice C , $x+7y-10=0$, $área\,\frac{25}{2}u^2$.

3. Representa.

$y=|-x^2-2x+3|$

4. La función $y=x^3+mx^2+nx+p$ pasa por el punto $(-1,0)$. Tiene un mínimo en $x=1$ y un punto de inflexión en $x=\frac{-1}{3}$. Calcula m, n, p .

solución: $m=1, n=-5, p=-5$

5. a) Dibujar la gráfica de la función $g(x)=e^x-x$.

b) Calcular el dominio de definición $f(x)=\frac{1}{e^x-x}$ y su comportamiento en el infinito.

c) Determinar (si existen) los máximos y mínimos absolutos de $f(x)$ en su dominio de definición.

solución: b) $\mathbb{R}$. Tiende a 0 c) máximo relativo en $(0,1)$

Hoja 19

1. El cajero automático de una determinada entidad bancaria solo admite billetes de 50, de 20 y de 10 euros. Los viernes depositan en el cajero 225 billetes por un importe total de 7000 euros. Averiguar el numero de billetes de cada valor depositado, sabiendo que la suma del numero de billetes de 50 y de 10 euros es el doble que el numero de billetes de 20 euros.

solución: 100 billetes de 50€, 75 billetes de 20€, 50 billetes de 10€

2. Sea la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x(x^2 - x + 1)$.

a) Calcula $\lim_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

b) Halla los extremos relativos de $f(x)$ (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan), determinando si son máximos o mínimos.

c) Determina las abscisas de los puntos de inflexión de la gráfica.

solución: a) $+\infty, 0$ b) $(0,1)$ mínimo, $(-1, \frac{3}{e})$ máximo c) $x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$

3. Un alambre de 100 m de longitud se divide en dos trozos. Con uno de los trozos se construye un cuadrado y con el otro un rectángulo cuya base es doble que su altura. Calcula las longitudes de cada uno de los trozos con la condición de que la suma de las áreas de estas dos figuras sea mínima.

solución: trozo para formar el cuadrado: $47{,}059 \ m$. Trozo del rectángulo: $52{,}941 \ m$.

4. En una piscina hay un trampolín a $8 m$ de altura del agua. Un nadador se lanza tomando impulso y elevándose $1 m$ antes de empezar a caer. El nadador alcanza el agua a $8 m$ del borde del trampolín.

a) Si tomamos como origen de coordenadas la proyección del extremo del trampolín sobre el agua y el vértice de la parábola es (a, b) , ¿cuánto vale b ?

b) La ecuación del movimiento es $y = k(x - c)^2 + 9$. Justifícala y halla k y c .

Hoja 20

1. Sea la función continua $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases} x+k & si \quad x \leqslant 0 \\ \dfrac{e^{x^2}-1}{x^2} & si \quad x>0 \end{cases}$

a) Calcula el valor de k .

b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=1$.

solución: a) $k=1$

2. Sea la función $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{1-x}$, $x \neq 1$

a) Estudia las asíntotas de la gráfica de la función.

b) Halla los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función.

solución:

a) Asíntota vertical $x=1$. Asíntota horizontal $y=0$.

b) Mínimo relativo $(0,1)$. Estrictamente decreciente en $(-\infty, 0)$. Estrictamente creciente en $(0,+\infty)-\{1\}$.

3. Queremos hacer junto a la carretera un cercado rectangular para unos caballos en una zona llana. Cada metro del lado del cercado que está junto a la carretera nos cuesta 100 euros, mientras que para el resto del cercado nos cuesta 10 euros el metro. ¿Cuáles son las dimensiones del prado de área máxima que podemos cercar con 3000 euros?

solución: $\dfrac{150}{11}$ metros paralelo a la carretera, 75 metros perpendicular a la carretera.

4. Sea la función definida por $f(x)=ax^3+bx^2+cx$. Determina $a, b \; y \; c$ sabiendo que su gráfica tiene un punto de inflexión en $(1,0)$ y que la recta tangente en ese punto tiene por ecuación $y=-3x+3$.

solución: $a=3, b=-9, c=6$

5. Dada la función $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-3)^2}$, se pide:

a) Hallar las asíntotas de su gráfica.

b) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=2$.

solución: a) asíntota vertical en $x=3$, asíntota oblícua $y=x+6$ b) $y=28x-48$

Hoja 21

1. Representa gráficamente $f(x)=\left\{\begin{matrix} x^2+3 & si & x<1 \\ 5-x^2 & si & x\geq 1 \end{matrix}\right\}$.

2. Representa gráficamente $f(x)=\left\{\begin{matrix} \sqrt{x+3} & si & x<1 \\ \dfrac{2}{x} & si & x\geq 1 \end{matrix}\right\}$.

3. Calcula las asíntotas de $f(x)=\dfrac{x^2-3x+1}{x-1}$.

4. Calcula las asíntotas de $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-2x}$.

5. Calcula el valor de k para que la función $f(x)=\left\{\begin{matrix} x^3-2x+k & si & x\neq 3 \\ 7 & si & x=3 \end{matrix}\right\}$ sea continua en toda la recta real.

6. Calcula las asíntotas de $f(x)=\dfrac{x}{1+2x}$.

7. Calcula las asíntotas de $f(x)=\dfrac{x^3}{1+x^2}$.

8. Calcula las asíntotas de $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x^2-2x}$.

9. Calcula las asíntotas de $f(x)=\dfrac{2x^3-3x^2+7}{x}$.

10. Calcula el límite $\lim_{x\to 0}\dfrac{4x}{x^2-2x}$.

Hoja 22

1. Calcula los límites laterales de la siguiente función en los puntos donde se anula el denominador.

$$f(x)=\frac{3x}{2x+4}$$

2. Calcula los límites laterales de la siguiente función en los puntos donde se anula el denominador.

$$f(x)=\frac{x-1}{x^2-2x}$$

3. Calcula los límites laterales de la siguiente función en los puntos donde se anula el denominador.

$$f(x)=\frac{x^3-2x^2}{x^2}$$

4. Calcula las asíntotas de $f(x)=\frac{(3-x)^2}{2x+1}$.

5. Calcula las asíntotas de $f(x)=x+1+\frac{5}{x}$.

6. Calcula las asíntotas de $f(x)=\frac{1}{e^x}$ y de $g(x)=1+e^x$.

7. El gasto mensual en alimentación de una familia depende de su renta x , según la función

$g(x)=\left\{\begin{matrix} 0{,}6\,x+200 & si & 0\leq x\leq 1000 \\ \frac{1000\,x}{x+250} & si & x>1000 \end{matrix}\right\}$, donde los ingresos y los gastos vienen dados en euros.

Representa la función y determina si es continua. Explica el significado del comportamiento de la función cuando la renta tiende a $+\infty$.

8. Calcula los siguientes límites.

a) $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x}-x)$ b) $\lim_{x\to+\infty}(2^x-x^3)$

Hoja 23

1. Representa $f(x)=\frac{x^2}{4}$ para $x\geq 1$. Calcula $f(x-5)$ y $f(-x+2)$.

2. Representa $f(x)=\sqrt[3]{-x+2}$.

3. Representa $f(x)=\begin{Bmatrix} x+1 & si & -3\leq x<0 \\ x^2-2x+1 & si & 0\leq x<3 \\ 4 & si & x\in(3,7) \end{Bmatrix}$.

4. Sea $f(x)=x^2-5x+3$ y $g(x)=x^2$. Obtén $f[g(x)]$ y $g[f(x)]$.

5. Sea $f(x)=sen(x)$ y $g(x)=x^2+5$. Obtén $f[g(x)]$, $g[f(x)]$, $f[f(x)]$ y $g[g(x)]$. Hallar el valor de estas composiciones de funciones en $x=0$ y en $x=2$.

6. De un cuadrado de $4\,cm$ de lado, se cortan en las esquinas triángulo rectángulos isósceles cuyos lados iguales miden x . Escribe el área del octógono resultante, el dominio de la función área y su recorrido.

7. Sea $f(x)=x^2+1$ y $g(x)=\frac{1}{x}$. Obtener las siguientes composiciones: $(f\circ g)(2)$, $(g\circ g)(x)$, $(g\circ f)(-3)$, $(f\circ g)(x)$.

8. Calcular la función inversa de $f(x)=3x$, $g(x)=x+7$ y $h(x)=3x-2$.

9. Sea $f(x)=\frac{1}{x}$. Representa $f(x)-2$, $f(x-3)$, $-f(x)$ y $|f(x)|$.

10. La factura del gas de una familia, en septiembre, ha sido $24{,}82$ euros por $12\,m^3$. Y en octubre, $43{,}81$ euros por $42\,m^3$. Escribe la función lineal que da el importe de la factura según los m^3 consumidos. ¿Cuánto pagarán si consumen $28\,m^3$?

11. El precio del billete de una línea de cercanías depende linealmente de los kilómetros recorridos. Por 57 km he pagado $2{,}85$ euros y por 168 km, $13{,}4$ euros. Calcula el precio de un billete para una distancia de 100 km. ¿Cuál es la función que nos indica el precio según los kilómetros recorridos?

Hoja 24

1. La dosis de un medicamento es $0{,}25\,g$ por cada kilo de peso del paciente, hasta un máximo de $15\,g$. Representa la función peso del paciente-cantidad de medicamento y halla su expresión analítica.

2. Los gastos fijos mensuales de una empresa por la fabricación de x televisores son $G=3000+25\mathrm{x}$, en miles de euros, y los ingresos mensuales son $I=50x-0{,}02x^2$, también en miles de euros.

¿Cuántos televisores deben fabricarse para que el beneficio (ingresos menos gastos) sea máximo?

3. Una pelota es lanzada verticalmente hacia arriba desde lo alto de un edificio. La altura que alcanza viene dada por la fórmula $h=80+64t-16t^2$ (t en segundos y h en metros).

a) Dibuja la gráfica en el intervalo $[0,5]$.

b) Halla la altura del edificio.

c) ¿En qué instante alcanza su máxima altura?

4. El precio de venta de un artículo viene dado por la expresión $p=12-0{,}01x$ (x = número de artículos fabricados; p = precio, en cientos de euros).

a) Si se fabrican y se venden 500 artículos, ¿cuáles serán los ingresos obtenidos?

b) Representa la función Nº de artículos-Ingresos.

c) ¿Cuántos artículos se deben fabricar para que los ingresos sean máximos?

5. Un fabricante vende mensualmente 100 electrodomésticos a 400 euros cada uno y sabe que por cada 10 euros de subida venderá 2 electrodomésticos menos.

a) ¿Cuáles serán los ingresos si sube los precios 50 euros?

b) Escribe la función que relaciona la subida de precio con los ingresos mensuales.

c) ¿Cuál debe ser la subida para que los ingresos sean máximos?

6. El coste de producción de x unidades de un producto es igual a $\frac{1}{4}x^2+35x+25$ euros y el precio de venta de una unidad es $50-\frac{x}{4}$ euros.

a) Escribe la función que nos da el beneficio total si se venden las x unidades producidas.

b) Halla el número de unidades que deben venderse para que el beneficio sea máximo.

Hoja 25

1. Elena va a visitar a su amiga Ana y tarda 20 minutos en llegar a su casa, que está a 1 km de distancia. Está allí media hora y en el camino de vuelta emplea el mismo tiempo que en el de ida.

a) Representa la función tiempo-distancia.

b) Busca su expresión analítica.

2. De la función $f(x)=k\cdot a^x$ sabemos que $f(0)=5$ y $f(3)=40$. Cuanto valen k y a .

3. En el contrato de trabajo de un empleado figura que su sueldo subirá un 6% anual.

a) Si empieza ganando 10 000 euros anuales, ¿cuánto ganará dentro de 10 años?

b) Calcula cuánto tiempo tardará en duplicarse su sueldo.

4. Dada la función $f(x)=1+\sqrt{x}$, halla $f^{-1}(x)$. Representa las dos funciones y comprueba su simetría respecto de la bisectriz del primer cuadrante.

5. Dada la función $y=a^x$, contesta:

a) ¿Puede ser negativa la y ? ¿Y la x ?

b) ¿Para qué valores de a la función es creciente?

c) ¿Cuál es el punto por el que pasan todas las funciones del tipo $y=a^x$?

d) ¿Para qué valores de x se verifica $0<a^x<1$ siendo $a>1$?

6. Una parábola corta al eje de abscisas en $x=1$ y en $x=3.$ La ordenada del vértice es $y=-4$. ¿Cuál es la ecuación de esa parábola?

7. Halla el dominio de $f(x)=\sqrt{\frac{x+3}{x-2}}$ y $g(x)=\sqrt{\frac{x-9}{x}}$

8. Representa $f(x)=|x-1|-|x|$

9. Las tarifas de una empresa de transportes son:

- 40 euros por tonelada de carga si esta es menor o igual a 20 t.
- Si la carga es mayor que 20 t, se restará, de los 40 euros, tantos euros como toneladas sobrepasen las 20.

a) Dibuja la función ingresos de la empresa según la carga que transporte (carga máxima: 30 t).

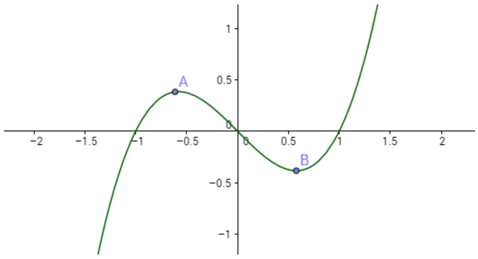
b) Obtén la expresión analítica.

Hoja 26

1. a) Calcula el número real m que cumple $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+mx)}{sen(2x)}=3$.

b) Obtener el valor de a para que $f(x)=\begin{cases} x^2+ax+a-1 & si \quad x<2 \\ \ln(x-1) & si \quad x\geq 2 \end{cases}$ sea continua en $x=2$.

c) La siguiente gráfica muestra la derivada $f'(x)$ de una función $f(x)$. Viendo la gráfica, ¿qué podemos decir de los intervalos de crecimiento, decrecimiento y de los extremos relativos de la función original $f(x)$?



2. Sea la función $g(x)=\frac{x^3}{3}-4x^2-\frac{2x}{3}-4$. Hallar los valores x de la curva en que la recta tangente es paralela a la recta $0=2x+3y-4$.

3. Considera la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$. Determina $a, b\, y\, c$ sabiendo que la recta normal a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x=0$ es $y+x+3=0$ y que el punto de inflexión tiene abscisa $x=1$.

4. Sea la función $f:(0,+\infty)$ y definida por $f(x)=\frac{1}{x}+\ln(x)$. a) Halla los extremos relativos de $f(x)$. b) Determina la ecuación explícita de la recta tangente a la función en $x=e$.

5. a) Sea $f(x)=sen(x)$. Obtener la ecuación explícita de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x=\frac{\pi}{4}$. b) Sabiendo que $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{a}{\ln x}\right)$ es finito, calcula a y el valor del límite.

6. Se desea construir un contenedor con forma de paralelepípedo rectangular de $100\,m^3$ de volumen, de manera que el largo de su base sea $\frac{4}{3}$ de la anchura x de su base. Los precios de m^2 de pintura del suelo, del techo y de la pared lateral son, respectivamente, $225\,€/m^2$, $300\,€/m^2$ y $256\,€/m^2$. Determinar razonadamente las dimensiones que minimizan el coste de pintura y dicho coste mínimo.

7. Sea $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ un polinomio con extremo relativo en $x=1$, con punto de inflexión en $x=3$ y que pasa por el origen de coordenadas. Determinar $a, b\, y\, c$.

8. Sea la función definida por $f(x)=\frac{2x^2}{(x+1)(x-2)}$. Estudia el dominio, los puntos de corte con los ejes, las asíntotas, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los extremos relativos.

Hoja 27

1. a) Calcula $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1-\cos(x)}{tg(x)}\right)$.

b) Obtener en forma explícita la recta tangente a la función $f(x)=e^x \cdot \ln(x)+2x$ en $x=1$.

c) Obtener en forma explícita la recta tangente a la función $f(x)=\frac{x(2x+1)}{\sqrt{x+2}}$ en $x=2$.

2. a) Estudia y representa gráficamente $f(x)=x^2-4x+2$. b) Sea $f(x)=\frac{x}{\ln x}$. Estudia el dominio, las asíntotas y los extremos relativos.

3. Sea la función $f(x)=\ln(x^3-4x)$. a) Determina el dominio de la función. b) Halla la ecuación explícita de la recta tangente en el punto $x=-1$.

4. Sea la función $f(x)=x^2-8\cdot\ln(x)$ definida en $f:1 \to +\infty$. Estudia intervalos de crecimiento y decrecimiento, calcula los extremos relativos de la función y obtén el valor de la ordenada en cada extremo.

5. a) La derivada de una función es negativa para valores $x<1$ y positiva para valores $x>1$. ¿Podemos afirmar que en $x=1$ tenemos un mínimo relativo? Razona tu respuesta y escribe la ecuación de una función que justifique tu respuesta.

b) Calcula $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1-\cos(x)}{tg(x)}\right)$.

c) Sea $f(x)=\left\{\begin{matrix} \frac{sen(x)}{x}+2 & si \quad x\neq 0 \\ k & si \quad x=0 \end{matrix}\right\}$. Calcula k para que $f(x)$ sea continua en $x=0$.

6. Estudia las asíntotas y los extremos relativos de la función $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x^2+1}$.

7. a) Calcule a y b para que la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+2$ pase por el punto $(-1,6)$ y su recta tangente en $x=1$ forme un ángulo de 45° con el eje OX.

b) Sea la función $f(x)=x^2-8\cdot\ln(x)$ definida en $f:1 \to +\infty$. Obtener los puntos de inflexión y el valor de la ordenada de esos puntos.

8. Sea la función $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$. ¿Qué punto de la función se encuentra a la menor distancia posible del origen $(0,0)$? Obtener esa distancia mínima.

Hoja 28

1. Expresar la recta $y=2x-4$ en su forma vectorial, paramétrica, cartesiana, implícita, punto-pendiente y canónica.

2. Dado el triángulo de vértices $A(0,0)$, $B(1,1)$, $C(5,-4)$ encontrar las ecuaciones explícitas de sus tres mediatrices y comprobar que se cortan en un punto (circuncentro). Obtener la ecuación de la circunferencia circunscrita.

3. Obtener la ecuación de una elipse centrada en $O(-1,1)$, semieje mayor $a=5$ paralelo al eje de ordenadas y excentricidad $e=0,1$.

4. Romper a trozos la siguiente función con valor absoluto.

$$f(x)=|x+|x^2-1||$$

5. Representar gráficamente $f(x)=|x^2-2x-3|$.

6. Deriva mediante la definición formal de derivada.

a) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ b) $f(x)=\frac{x^2}{x+1}$

7. Inventa y resuelve un ejemplo de límite donde aparezcan las siguientes indeterminaciones: $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $\infty-\infty$, $0\cdot\infty$, ∞^0 , 1^∞ .

8. Escribe una función a trozos que contenga:

a) Una discontinuidad evitable.

b) Una discontinuidad no evitable de primera especie de salto finito.

c) Una discontinuidad no evitable de primera especie de salto infinito.

b) Una discontinuidad no evitable de segunda especie.

9. Obtener el vector que une los puntos $A(2,3)$ y $B(5,10)$. Obtener un vector paralelo a este y otro perpendicular. Obtener el punto medio del vector. Trazar una recta perpendicular al vector que pase por su punto medio.

10. Obtener el punto de la gráfica de la función $f(x)=\ln(x)$ donde la pendiente de la recta tangente a la función en dicho punto sea igual a la pendiente de la recta $y-x=0$.

Hoja 29

1. Calcular la ecuación paramétrica de la recta tangente a las siguientes funciones en el punto $x=0$.

a) $f(x)=e^x$

b) $f(x)=\cos(x)$

c) $f(x)=sen(x)$

d) $f(x)=tg(x)$

e) $f(x)=\ln(x+e)$

f) $f(x)=\frac{x}{x-1}$

g) $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$

h) $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$