Teoría – Tema 9

Representación gráfica de funciones

Índice de contenido

Gráficas de funciones

Hasta la fecha, en Secundaria y en lo que llevamos de 1ºBachillearto, hemos aprendido a interpretar gráficas o bien a trazar algunas sencillas: rectas, parábolas, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas de x .

Una vez que hemos aprendido a derivar poseemos una potente herramienta para, a partir de la expresión analítica de una función, realizar un boceto bastante preciso de la curva en los ejes cartesianos.

Los pasos que vamos a seguir son los siguientes (pueden realizarse en otro orden, e incluso incluir más pasos o eliminar algunos. Aquí ofrecemos una propuesta).

1. Dominio de la función.
2. Puntos de corte con los ejes.
3. Periodicidad y simetría.
4. Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.
5. Extremos relativos. Crecimiento y decrecimiento de la función.
6. Puntos de inflexión. Curvatura cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo.
7. Pintar la gráfica.

Repito: estos pasos son una de tantas propuestas que aparecen en los manuales matemáticos. La mejor forma de comprender cada paso... es ver ejemplos concretos.

Gráfica de una parábola

$f(x)=x^2+x-2$

El dominio de la función son todos los números reales, por ser polinómica.

Los puntos de corte con los ejes cartesianos resulta:

$$corte \quad con \quad eje \quad OX \quad \rightarrow \quad y=0 \quad \rightarrow \quad x^2+x-2=0 \quad \rightarrow \quad x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2} \quad \rightarrow \quad (-2,0) \quad , \quad (1,0)$$

$$corte \quad con \quad eje \quad OY \quad \rightarrow \quad x=0 \quad \rightarrow \quad y=-2 \quad \rightarrow \quad (0,-2)$$

La función no presenta periodicidad.

No es par, ya que $f(x)\neq f(-x)$. Y no es impar ya que $f(x)\neq -f(-x)$.

La asíntota vertical puede aparecer en aquellos puntos donde la función no esté definida. Como el dominio son todos los reales, no existen asíntotas verticales.

La asíntota horizontal aparece si la función converge a un valor finito cuando x tiende a infinito. Es decir:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x^2+2x-2)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x^2+2x-2)=+\infty$$

Al no converger a valores finitos, no existen asíntotas horizontales.

Si no existen asíntotas horizontales pueden aparecer oblicuas (ambas nunca pueden darse a la vez). La asíntota oblicua es una recta $y=mx+n$ a la que la función tiende en el infinito. Los parámetros m y n de la recta se obtienen con los siguientes límites:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} \quad \rightarrow \quad si \quad m\in\mathbb{R} \quad y \quad m\neq 0 \quad \rightarrow \quad n=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx)$$

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x-2}{x}=+\infty$$

Es decir: tampoco hay asíntota oblicua.

Para estudiar los extremos relativos y el crecimiento, recordamos que los puntos críticos (candidatos a extremos relativos) aparecen en aquellos puntos que anulan la primera derivada.

$$f(x)=x^2+x-2 \ \rightarrow \ f'(x)=2x+1 \ , \ f'(x)=0 \ \rightarrow \ 2x+1=0 \ \rightarrow \ x=\frac{-1}{2}$$

$$f\left(\frac{-1}{2}\right)=\left(\frac{-1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}-2=\frac{1}{4}-\frac{5}{2}=\frac{-9}{4}$$

Candidato a punto crítico: $\left(\frac{-1}{2}, f\left(\frac{-1}{2}\right)\right)=\left(\frac{-1}{2},\frac{-9}{4}\right)$

¿Es un extremo relativo? Debemos comprobarlo con alguna de las condiciones suficientes estudiadas en clases anteriores.

Vamos a estudiar el signo de la derivada a ambos lados del punto crítico, ya que así también estudiamos los intervalos de crecimiento de la función.

$\left(-\infty,\frac{-1}{2}\right) \ \rightarrow \ x=-10 \ \rightarrow \ f'(-10)=2\cdot(-10)+1=-19<0 \ \rightarrow \ f(x)$ decreciente

$\left(\frac{-1}{2},+\infty\right) \ \rightarrow \ x=0 \ \rightarrow \ f'(0)=2\cdot 0+1=1>0 \ \rightarrow \ f(x)$ creciente

Por lo tanto, en $\left(\frac{-1}{2},\frac{-9}{4}\right)$ tenemos un mínimo relativo.

Debemos estudiar ahora los **puntos de inflexión** y la **curvatura**. **¿Qué significan estos términos?**

Una curva cóncava hacia arriba es aquella que presenta la forma U.

Una curva cóncava hacia abajo presenta la forma ∩.

Y un punto de inflexión es aquél punto donde cambia la curvatura de la función (de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo, o de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba)

¿Qué condición necesaria cumplen los puntos de inflexión? Anulan la segunda derivada de la función.

$$f'(x)=2x+1 \ \rightarrow \ f''(x)=2$$

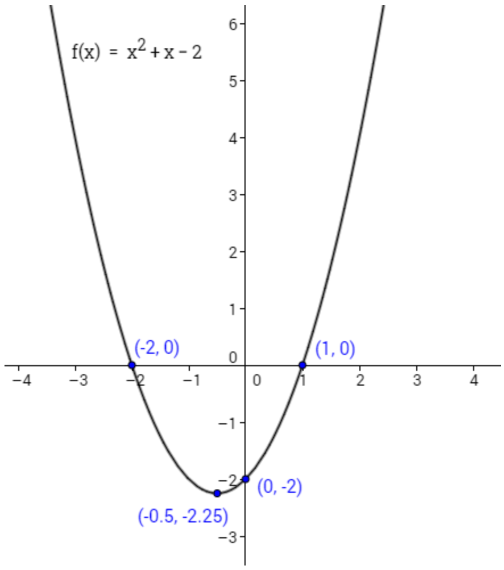
La segunda derivada nunca se anula, por lo tanto no existen puntos de inflexión.

¿Cómo estudiamos la curvatura? Evaluando la segunda derivada: si la segunda derivada es positiva, la función es cóncava hacia arriba U. Y si la segunda derivada es negativa, la función es cóncava hacia abajo ∩.

Si este cambio de curvatura se produce a izquierda y derecha de un punto que anula la segunda derivada, ese punto será punto de inflexión.

Para nuestro caso particular $f(x)=x^2+x-2$ con segunda derivada $f''(x)=2$ que nunca se anula, vemos claramente que $f''(x)>0$ para cualquier valor del dominio de la función. Por lo tanto, la función siempre es cóncava hacia arriba U.

Ya tenemos datos suficientes para puntar nuestra función.



Gráfica de un polinomio de grado 3

$f(x)=x^3+2x^2-7x+4$

El dominio de la función son todos los números reales, por ser polinómica.

Los puntos de corte con los ejes cartesianos resulta:

$$corte\ \ con\ \ eje\ \ OX \ \rightarrow\ y=0 \ \rightarrow\ x^3+2x^2-7x+4=0 \ \rightarrow\ (x+4)(x-1)^2=0$$
$$\rightarrow\ (-4{,}0)\ \ ,\ \ (1{,}0)$$
$$corte\ \ con\ \ eje\ \ OY \ \rightarrow\ x=0 \ \rightarrow\ y=4 \ \rightarrow\ (0{,}4)$$

La función no presenta periodicidad.

No es par, ya que $f(x)\neq f(-x)$. Y no es impar ya que $f(x)\neq -f(-x)$.

No existen asíntotas verticales, por ser el dominio toda la recta real.

No existen asíntotas horizontales ya que:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x^3+2x^2-7x+4)=+\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x^3+2x^2-7x+4)=-\infty$$

Y tampoco existen asíntotas oblicuas:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+2x^2-7x+4}{x}=+\infty$$

Derivamos la función para estudiar los extremos relativos y los intervalos de crecimiento.

$$f(x)=x^3+2x^2-7x+4 \ \rightarrow\ f'(x)=3x^2+4x-7 \ \ ,\ \ f'(x)=0 \ \rightarrow\ 3x^2+4x-7=0$$
$$x=\frac{-4\pm\sqrt{16+84}}{6}=\frac{-4\pm10}{6} \ \rightarrow\ x=\frac{-7}{3}\ \ ,\ \ x=1$$

$f(\frac{-7}{3})=18{,}52 \ \rightarrow\ (\frac{-7}{3},\ 18{,}52)$ → Punto crítico → Candidato a extremo relativo

$f(1)=0 \ \rightarrow\ (1{,}0)$ → Punto crítico → Candidato a extremo relativo

Estudiamos el crecimiento de la función en los siguientes intervalos:

$(-\infty, \frac{-7}{3}) \rightarrow x=-10 \rightarrow f'(-10)>0 \rightarrow f(x)$ creciente

$(\frac{-7}{3}, 1) \rightarrow x=0 \rightarrow f'(0)<0 \rightarrow f(x)$ decreciente

$(1, \infty) \rightarrow x=10 \rightarrow f'(10)>0 \rightarrow f(x)$ creciente

Por lo tanto:

$(\frac{-7}{3}, \ 18{,}52) \rightarrow$ Máximo relativo

$(1{,}0) \rightarrow$ Mínimo relativo

Calculamos la segunda derivada.

$f'(x)=3x^2+4x-7 \rightarrow f''(x)=6x+4 \ , \ f''(x)=0 \rightarrow x=\frac{-2}{3}$

$(\frac{-2}{3}, f(\frac{-2}{3}))=(\frac{-2}{3}, \ 9{,}26) \rightarrow$ Candidato a punto de inflexión

Evaluamos la segunda derivada a ambos lados del candidato a punto de inflexión.

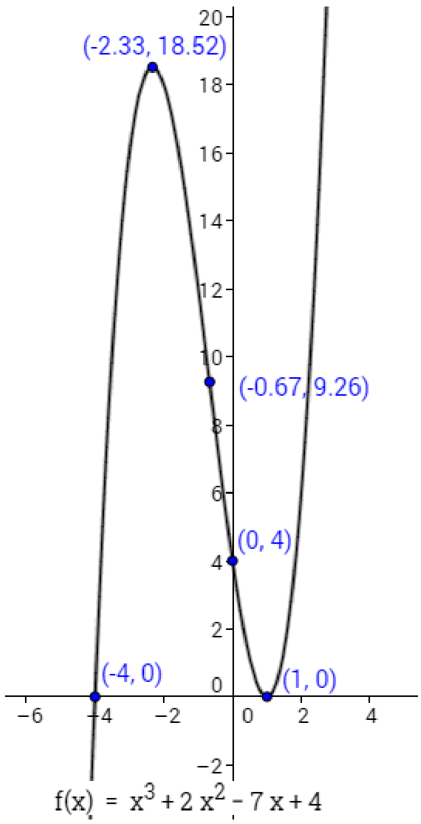
$(-\infty, \frac{-2}{3}) \rightarrow x=-10 \rightarrow f''(-10)<0 \rightarrow f(x)$ cóncava hacia abajo ∩

$(\frac{-2}{3}, \infty) \rightarrow x=0 \rightarrow f''(0)>0 \rightarrow f(x)$ cóncava hacia arriba U

Por lo tanto:

$(\frac{-2}{3}, \ 9{,}26) \rightarrow$ Punto de inflexión (cambio de curvatura)

Pintemos finalmente la función.


(-2.33, 18.52)
(-0.67, 9.26)
(0, 4)
(-4, 0)
(1, 0)
f(x) = x3 + 2 x2 - 7 x + 4

Gráfica de un cociente de polinomios con asíntota vertical y horizontal

$$f(x)=\frac{x}{x-5}$$

El dominio de la función son todos los reales salvo los puntos que anulan al denominador. Es decir: $Dom(f(x))=\mathbb{R}-5$.

Los puntos de corte con los ejes cartesianos resulta:

$$corte\ \ con\ \ eje\ \ OX\ \rightarrow\ y=0\ \rightarrow\ x=0\ \rightarrow\ (0,0)$$
$$corte\ \ con\ \ eje\ \ OY\ \rightarrow\ x=0\ \rightarrow\ y=0\ \rightarrow\ (0,0)$$

La función no presenta periodicidad.

No es par, ya que $f(x)\neq f(-x)$. Y no es impar ya que $f(x)\neq -f(-x)$.

Estudiamos la asíntota vertical que aparece en $x=5$, punto donde la función no está definida. Calculamos los límites laterales, para conocer hacia donde se dispara la función en los alrededores de $x=5$.

$$\lim_{x\to 5^-}\frac{x}{x-5}=\frac{5}{0^-}=-\infty$$
$$\lim_{x\to 5^+}\frac{x}{x-5}=\frac{5}{0^+}=+\infty$$

Estudiamos el límite en el infinito de la función para determinar la existencia de asíntota horizontal.

$\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{x-5}=1$, $\lim_{x\to -\infty}\frac{x}{x-5}=1$ $\rightarrow$ Asíntota horizontal en $y=1$

Al existir asíntota horizontal, no existe asíntota oblicua. Derivamos para estudiar los extremos relativos y la monotonía.

$f(x)=\frac{x}{x-5}\ \rightarrow\ f'(x)=\frac{-5}{(x-5)^2}$, $f'(x)=0\ \rightarrow\ -5=0$ $\rightarrow$ Absurdo matemático

La primera derivada no se anula paa ningún valor del dominio. Por lo tanto no hay extremos relativos.

El crecimiento lo estudiamos en los intervalos formados por los puntos donde no está definida la función.

$(-\infty, 5) \rightarrow x=0 \rightarrow f'(0)<0 \rightarrow f(x)$ decreciente

$(5, \infty) \rightarrow x=10 \rightarrow f'(10)<0 \rightarrow f(x)$ decreciente

La función es estrictamente decreciente en todo su dominio.

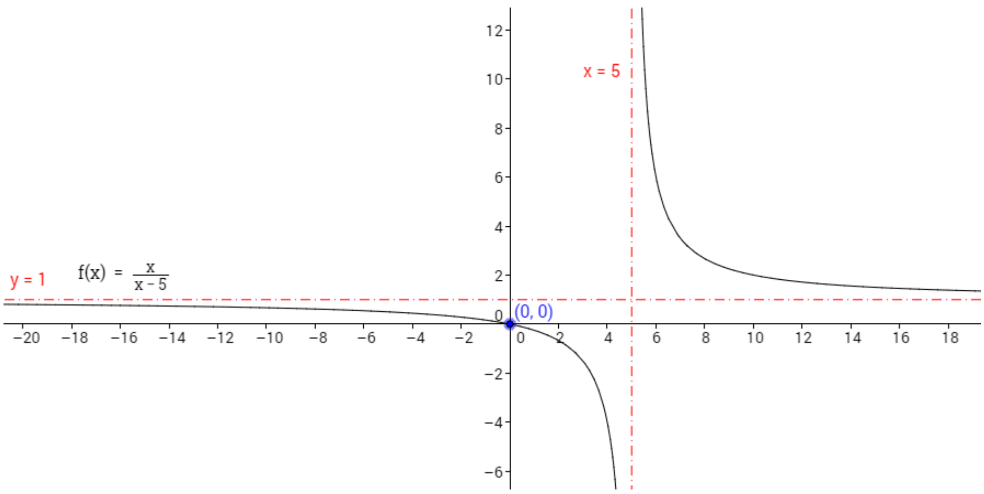
Estudiamos la curvatura con la segunda derivada.

$$f'(x)=\frac{-5}{(x-5)^2} \rightarrow f'(x)=\frac{10}{(x-5)^3} \quad , \quad f''(x)=0 \rightarrow 10=0$$ → Absurdo matemático

La segunda derivada nunca se anula, por lo que no hay puntos de inflexión. Estudiamos la curvatura en siguientes intervalos.

$(-\infty, 5) \rightarrow x=0 \rightarrow f''(0)<0 \rightarrow f(x)$ cóncava hacia abajo ∩

$(5, \infty) \rightarrow x=10 \rightarrow f''(10)>0 \rightarrow f(x)$ cóncava hacia arriba U



Gráfica de un cociente de polinomios con dos asíntotas verticales

$f(x)=\dfrac{x}{x^2-4}$

El dominio de la función son todos los reales salvo los puntos que anulan al denominador. Es decir: $Dom(f(x))=\mathbb{R}-\{-2,2\}$.

Los puntos de corte con los ejes cartesianos resulta:

$$\begin{array}{l} corte\ \ con\ \ eje\ \ OX \ \rightarrow\ y=0 \ \rightarrow\ x=0 \ \rightarrow\ (0,0) \\ corte\ \ con\ \ eje\ \ OY \ \rightarrow\ x=0 \ \rightarrow\ y=0 \ \rightarrow\ (0,0) \end{array}$$

La función no presenta periodicidad.

Es impar ya que $f(x)=-f(-x)$. Existe simetría central respecto al origen de coordenadas

Estudiamos las asíntotas verticales que aparecen en $x=-2$ y en $x=2$, puntos donde la función no está definida. Calculamos los límites laterales.

$$\lim_{x\to-2^-}\frac{x}{x^2-4}=\frac{-2}{0^+}=-\infty$$

$$\lim_{x\to-2^+}\frac{x}{x^2-4}=\frac{-2}{0^-}=+\infty$$

$$\lim_{x\to2^-}\frac{x}{x^2-4}=\frac{2}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to2^+}\frac{x}{x^2-4}=\frac{2}{0^+}=+\infty$$

Estudiamos el límite en el infinito de la función para determinar la existencia de asíntota horizontal. Y recordamos que en un cociente de polinomios, si la variable tiende a infinito y el grado del denominador es mayor que el grado del denomiador, el cociente tiende a 0 .

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2-4}=0$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2-4}=0$ $\rightarrow$ Asíntota horizontal en $y=0$

Al existir asíntota horizontal, no existe asíntota oblicua. Derivamos para estudiar los extremos relativos y la monotonía.

$$f(x)=\frac{x}{x^2-4} \rightarrow f'(x)=-\frac{x^2+4}{(x^2-4)^2} \quad , \quad f'(x)=0 \rightarrow x^2=-4 \rightarrow \text{Absurdo matemático}$$

La primera derivada no se anula para ningún valor del dominio. Por lo tanto no hay extremos relativos.

El crecimiento lo estudiamos en los intervalos formados por los puntos donde no está definida la función.

$(-\infty,-2) \rightarrow x=-10 \rightarrow f'(-10)<0 \rightarrow f(x)$ decreciente

$(-2,2) \rightarrow x=0 \rightarrow f'(0)<0 \rightarrow f(x)$ decreciente

$(2,+\infty) \rightarrow x=10 \rightarrow f'(10)<0 \rightarrow f(x)$ decreciente

La función es estrictamente decreciente en todo su dominio.

Estudiamos la curvatura con la segunda derivada.

$$f'(x)=-\frac{x^2+4}{(x^2-4)^2} \rightarrow f''(x)=\frac{2x^3+24x}{(x^2-4)^3} \quad , \quad f''(x)=0 \rightarrow x(2x^2+24)=0 \rightarrow x=0$$

La segunda derivada se anula en $x=0$, por lo que hay un candidato a punto de inflexión $\rightarrow$ $(0,f(0))=(0,0)$. Estudiamos la curvatura en siguientes intervalos.

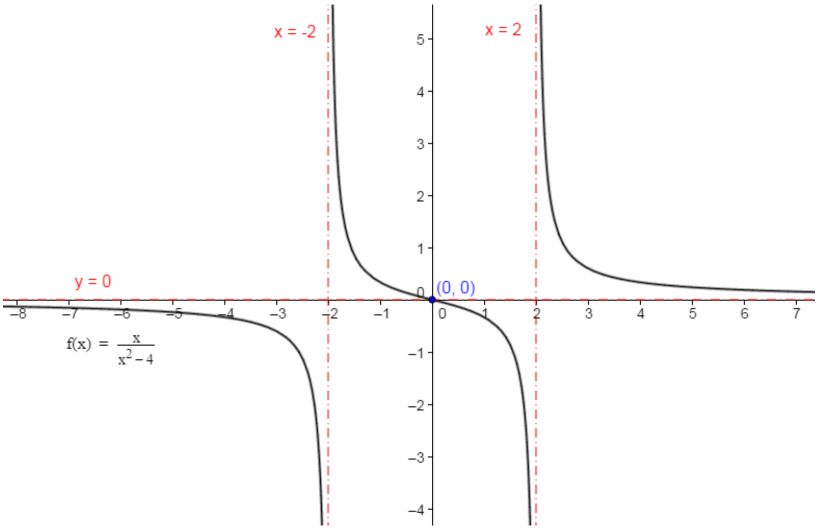
$(-\infty,-2) \rightarrow x=-10 \rightarrow f''(-10)<0 \rightarrow f(x)$ cóncava hacia abajo ∩

$(-2,0) \rightarrow x=-1 \rightarrow f''(-1)>0 \rightarrow f(x)$ cóncava hacia arriba U

$(0,2) \rightarrow x=1 \rightarrow f''(1)<0 \rightarrow f(x)$ cóncava hacia abajo ∩

$(2,+\infty) \rightarrow x=10 \rightarrow f''(10)>0 \rightarrow f(x)$ cóncava hacia arriba U

En $(0,0)$ hay un punto de inflexión, ya que la curvatura pasa de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba.


x = -2
x = 2
y = 0
(0, 0)
f(x) = x / (x² − 4)

Gráfica de cociente de polinomios con asíntota oblicua

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x}$$

El dominio de la función son todos los reales salvo los puntos que anulan al denominador. Es decir: $Dom(f(x))=\mathbb{R}-\{0\}$.

Los puntos de corte con los ejes cartesianos resulta:

$corte \quad con \quad eje \quad OX \quad \rightarrow \quad y=0 \quad \rightarrow \quad x^2-1=0 \quad \rightarrow \quad (-1{,}0) \quad , \quad (1{,}0)$

$corte \quad con \quad eje \quad OY \quad \rightarrow \quad x=0$ $\rightarrow$ La función no está definida en $x=0$

La función no presenta periodicidad.

Es impar ya que $f(x)=-f(-x)$. Existe simetría central respecto al origen de coordenadas

Estudiamos la asíntota vertical que aparece en $x=0$. Calculamos los límites laterales.

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2-1}{x}=\frac{-1}{0^-}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2-1}{x}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

Estudiamos el límite en el infinito de la función para determinar la existencia de asíntota horizontal. Y recordamos que en un cociente de polinomios, si la variable tiende a infinito y el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, el cociente tiende a ∞ .

$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{x}=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-1}{x}=-\infty \quad \rightarrow$ No hay asíntota horizontal

Al no existir asíntota horizontal, puede aparecer asíntota oblicua del tipo $y=mx+n$.

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{x^2}=1 \quad \rightarrow \quad m=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{x}=0 \quad\rightarrow\quad n=0$$

Existe asíntota oblicua en $y=x$.

Estudiamos los extremos relativos y los intervalos de crecimiento con la primera derivada

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x} \quad\rightarrow\quad f'(x)=\frac{2x\cdot x-(x^2-1)\cdot 1}{x^2}=\frac{x^2+1}{x^2} \quad , \quad f'(x)=0 \quad\rightarrow\quad x^2=-1$$

Llegamos a un absurdo matemático → La primera derivada no se anula para ningún valor del dominio. Por lo tanto no hay extremos relativos.

El crecimiento lo estudiamos en los intervalos formados por el punto donde no está definida la función.

$$(-\infty,0) \quad\rightarrow\quad x=-10 \quad\rightarrow\quad f'(-10)>0 \quad\rightarrow\quad f(x) \text{ creciente}$$
$$(0,+\infty) \quad\rightarrow\quad x=10 \quad\rightarrow\quad f'(10)>0 \quad\rightarrow\quad f(x) \text{ creciente}$$

La función es estrictamente creciente en todo su dominio.

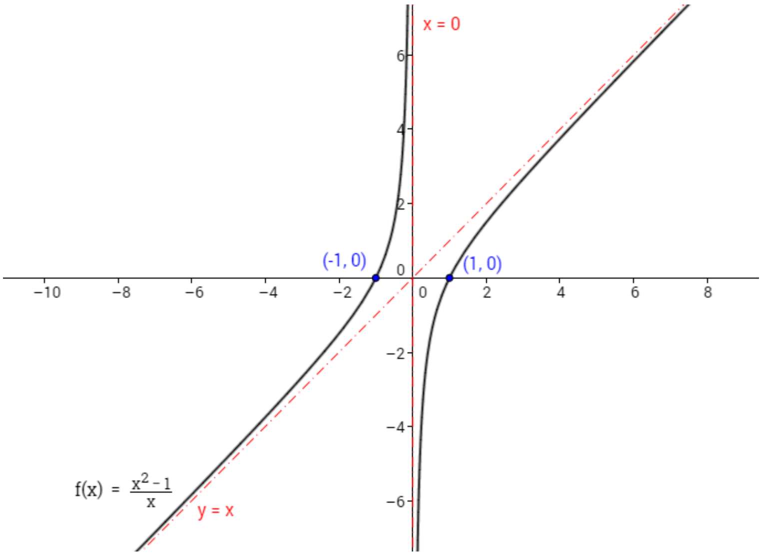
Estudiamos la curvatura con la segunda derivada.

$$f'(x)=\frac{x^2+1}{x^2} \quad\rightarrow\quad f''(x)=\frac{2x\cdot x^2-(x^2+1)\cdot 2x}{x^4}=\frac{-2}{x^3} \quad , \quad f''(x)=0 \quad\rightarrow\quad -2=0 \quad\rightarrow\quad x=0$$

Este nuevo absurdo matemático nos informa que no hay puntos de inflexión. Estudiamos la curvatura en siguientes intervalos.

$$(-\infty,0) \quad\rightarrow\quad x=-10 \quad\rightarrow\quad f''(-10)>0 \quad\rightarrow\quad f(x) \text{ cóncava hacia arriba U}$$
$$(0,+\infty) \quad\rightarrow\quad x=10 \quad\rightarrow\quad f''(10)<0 \quad\rightarrow\quad f(x) \text{ cóncava hacia abajo } \cap$$

Y ya tenemos información suficiente para pintar la gráfica.


x = 0
(-1, 0)
(1, 0)
f(x) = $\frac{x^2-1}{x}$
y = x
−10
−8
−6
−4
−2
0
2
4
6
8
6
4
2
−2
−4
−6

Gráfica de cociente de logaritmo con polinomio

$f(x)=\frac{\ln(x)}{x}$

El dominio de la función son todos los reales positivos, ya que el denominador se anula en $x=0$ y el logaritmo se define para argumentos positivos.

Es decir: $Dom(f(x))=(0,+\infty)$.

Los puntos de corte con los ejes cartesianos resulta:

$corte \quad con \quad eje \quad OX \quad \rightarrow \quad y=0 \quad \rightarrow \quad \ln(x)=0 \quad \rightarrow \quad (1,0)$

$corte \quad con \quad eje \quad OY \quad \rightarrow \quad x=0$ → La función no está definida en $x=0$

La función no presenta periodicidad.

La función no es par ni impar

Estudiamos la asíntota vertical que aparece en $x=0$. Calculamos los límites laterales.

$\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln(x)}{x}=\nexists$ → La función no está definida en los reales negativos

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x)}{x}=\frac{-\infty}{0^+}=-\infty$$

El logaritmo a la derecha de 0 se dispara a $-\infty$ y x es un número positivo; pequeño, pero positivo. Por lo tanto, el cociente va a $-\infty$.

Estudiamos el límite en el infinito de la función para determinar la existencia de asíntota horizontal. Y recordamos que el logaritmo tiende a infinito si x tiende a ∞ .

$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln(x)}{x}=\frac{+\infty}{+\infty}$ → Indeterminación → L'Hôpital → $\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln(x)}{x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x}=0$

Tenemos una asíntota horizontal en $y=0$. No habrá asíntota oblicua.

Estudiamos los extremos relativos y los intervalos de crecimiento con la primera derivada.

$$f(x)=\frac{\ln(x)}{x} \rightarrow f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln(x)\cdot 1}{x^2}=\frac{1-\ln(x)}{x^2} \quad , \quad f'(x)=0 \rightarrow \ln(x)=1 \rightarrow x=e$$

La primera derivada se anula para el punto $(e, f(e))=(e, \frac{1}{e})$. Por lo tanto hay un punto crítico. Debemos determinar si, efectivamente, es extremo relativo.

$(0,e) \rightarrow x=1 \rightarrow f'(1)>0 \rightarrow f(x)$ creciente
$(e,+\infty) \rightarrow x=10 \rightarrow f'(10)<0 \rightarrow f(x)$ decreciente

Se confirma la existencia de máximo relativo en el punto $(e, \frac{1}{e})$.

Estudiamos la curvatura con la segunda derivada.

$$f'(x)=\frac{1-\ln(x)}{x^2} \rightarrow f''(x)=\frac{\frac{-1}{x}\cdot x^2-(1-\ln(x)\cdot 2x)}{x^4}=\frac{\frac{-1}{x}\cdot x-(1-\ln(x)\cdot 2)}{x^3}$$

$$f''(x)=\frac{-1-(1-\ln(x)\cdot 2)}{x^3}=\frac{-3+2\ln(x)}{x^3} \rightarrow f''(x)=0 \rightarrow \ln(x)=\frac{3}{2}$$

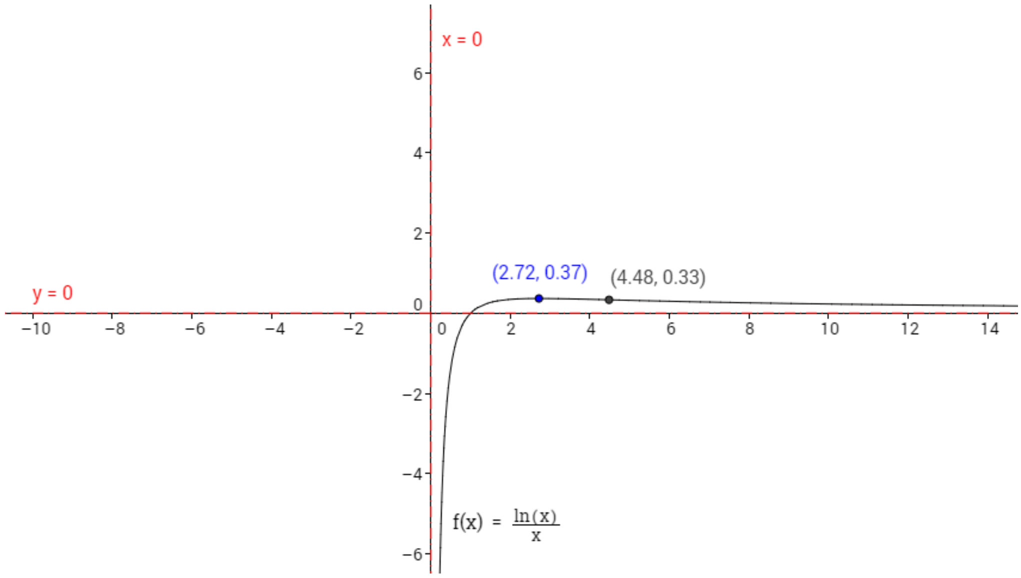
Resolvemos esta igualdad aplicando exponencial.

$$\ln(x)=\frac{3}{2} \rightarrow e^{\ln(x)}=e^{\frac{3}{2}} \rightarrow x=e^{\frac{3}{2}} \rightarrow x\simeq 4{,}48$$

Candidato a punto de inflexión: $(4{,}48, f(4{,}48))=(4{,}48, 0{,}33)$
Estudiamos la curvatura en los siguientes intervalos.

$(0,4{,}48) \rightarrow x=1 \rightarrow f''(-1)<0 \rightarrow f(x)$ cóncava hacia abajo ∩
$(4{,}48,+\infty) \rightarrow x=10 \rightarrow f''(10)>0 \rightarrow f(x)$ cóncava hacia arriba U

Existe punto de inflexión en $(4{,}48, 0{,}33)$.
Ya tenemos información suficiente para pintar la gráfica.


x = 0
y = 0
(2.72, 0.37)
(4.48, 0.33)
f(x) = ln(x) / x

Gráfica de cociente de polinomio con exponencial

$f(x)=\frac{x}{e^x}$

El denominador nunca se anula → $Dom(f(x))=\mathbb{R}$.

Los puntos de corte con los ejes cartesianos resulta:

$$corte \quad con \quad eje \quad OX \quad \rightarrow \quad y=0 \quad \rightarrow \quad x=0 \quad \rightarrow \quad (0,0)$$
$$corte \quad con \quad eje \quad OY \quad \rightarrow \quad x=0 \quad \rightarrow \quad y=0 \quad \rightarrow \quad (0,0)$$

La función no presenta periodicidad. La función no es par ni impar.

No hay asíntotas verticales, por ser el dominio todos los números reales.

Estudiamos el límite en el infinito de la función para determinar la existencia de asíntota horizontal. Recordamos que la exponencial tiende a infinito si x tiende a $+\infty$, y que la exponencial tiende a cero si x tiende a $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=\frac{+\infty}{+\infty} \rightarrow \text{Indeterminación} \rightarrow \text{L'Hôpital} \rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^x}=\frac{+\infty}{0} \rightarrow \text{Operamos en el límite} \rightarrow \lim_{x\to-\infty} x\cdot e^{-x}=-\infty\cdot(+\infty)=-\infty$$

Tenemos asíntota horizontal en $y=0$ para valores de la variable que tienden a $+\infty$. Pero esta asíntota no aparece cuando la variable tiende a $-\infty$. No hay asíntota oblicua.

Estudiamos los extremos relativos y los intervalos de crecimiento con la primera derivada.

$$f(x)=\frac{x}{e^x} \quad \rightarrow \quad f'(x)=\frac{1\cdot e^x-x\cdot e^x}{e^{2x}}=\frac{1-x}{e^x} \quad , \quad f'(x)=0 \quad \rightarrow \quad x=1$$

La primera derivada se anula para el punto $(1,f(1))=(1,\frac{1}{e})$. Por lo tanto hay un punto crítico. Debemos determinar si, efectivamente, es extremo relativo.

$$(-\infty,1) \quad \rightarrow \quad x=0 \quad \rightarrow \quad f'(0)>0 \quad \rightarrow \quad f(x) \quad \text{creciente}$$
$$(1,+\infty) \quad \rightarrow \quad x=10 \quad \rightarrow \quad f'(10)<0 \quad \rightarrow \quad f(x) \quad \text{decreciente}$$

Se confirma la existencia de máximo relativo en el punto $(1,\frac{1}{e})$. Estudiamos la curvatura con la segunda derivada.

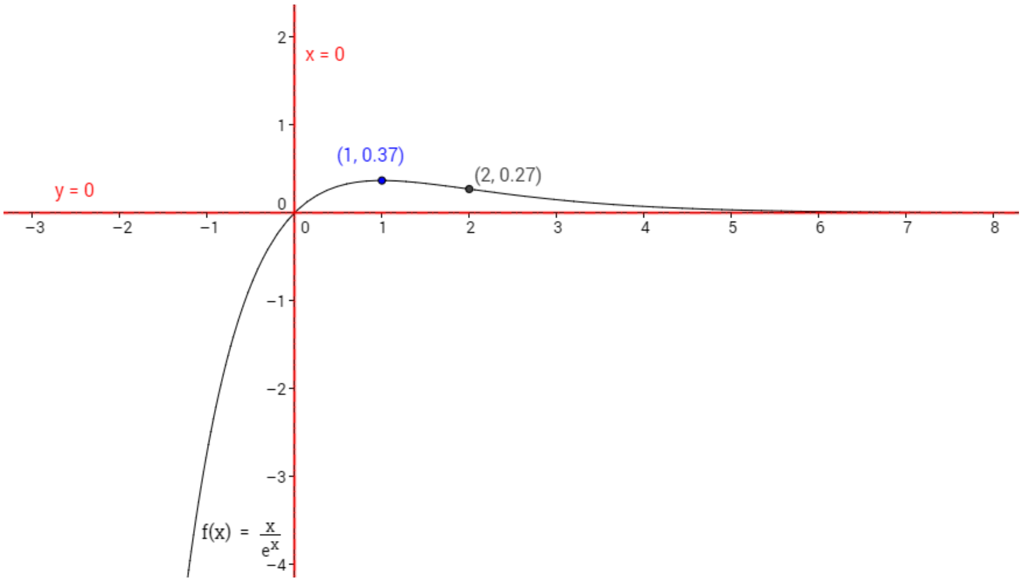
$$f'(x)=\frac{1-x}{e^x} \rightarrow f''(x)=\frac{-e^x-(1-x)e^x}{e^{2x}}=\frac{-1-(1-x)}{e^x}=\frac{-2+x}{e^x} \quad , \quad f''(x)=0 \rightarrow x=2$$

Candidato a punto de inflexión: $(2,f(2))=(2,\frac{2}{e^2})$. Estudiamos la curvatura en los siguientes intervalos.

$(-\infty,2) \rightarrow x=0 \rightarrow f''(0)<0 \rightarrow f(x)$ cóncava hacia abajo ∩

$(2,+\infty) \rightarrow x=10 \rightarrow f''(10)>0 \rightarrow f(x)$ cóncava hacia arriba U

Existe punto de inflexión en $(2,\frac{2}{e^2})$.



Gráfica de producto de polinomio con función trigonométrica

$f(x)=x\cdot sen(x)$

Esta función es un ejemplo de cómo puede “complicarse la cosa” con determinadas funciones. Algo tan sencillo como un producto... puede ser muy costoso de trabajar analíticamente para obtener la representación.

Esta función sirve de “toque de atención”: ¡¡Las representaciones gráficas pueden ser muy, muy, muy complejas!!

Vayamos poco a poco.

El dominio son todos los reales, ya que tenemos un producto de funciones continuas en toda la recta real → $Dom(f(x))=\mathbb{R}$.

Los puntos de corte con los ejes cartesianos resulta (ojo a la periodicidad):

$$corte\ \ con\ \ eje\ \ OX\ \ \rightarrow\ \ y=0\ \ \rightarrow\ \ x\cdot sen(x)=0\ \ \rightarrow\ \ (-\pi,0)\ ,\ (0,0)\ ,\ (\pi,0)\ ,\ (2\pi,0)\ ...$$
$$corte\ \ con\ \ eje\ \ OY\ \ \rightarrow\ \ x=0\ \ \rightarrow\ \ y=0\ \ \rightarrow\ \ (0,0)$$

La función presenta periodicidad de periodo 2π . La función es impar ya que $f(x)=-f(-x)$. Recuerda que la función seno es una función impar.

No hay asíntotas verticales, por ser el dominio todos los números reales.

Estudiamos el límite en el infinito de la función para determinar la existencia de asíntota horizontal. Recordamos que la función seno no diverge cuando x tiende a $\pm\infty$ (siempre oscila entre el valor mínimo -1 y el valor máximo 1).

$$\lim_{x\to\pm\infty} x\cdot sen(x)=\nexists$$

La función no converge a un valor finito cuando $x\to\infty$, ni tampoco se dispara al infinito. Por lo tanto, no hay asíntota horizontal. Estudiamos las asíntotas oblicua.

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot sen(x)}{x}=\lim_{x\to\infty} sen(x)=\nexists$$

Donde nuevamente hemos aplicado que la función seno no converge a un número finito en el infinito, ni diverge a infinito. No hay asíntota oblicua.

Estudiamos los extremos relativos y los intervalos de crecimiento con la primera derivada. Y aquí el “temita” se complica bastante.

$$f(x)=x\cdot sen(x) \rightarrow f'(x)=sen(x)+x\cdot\cos(x) \quad , \quad f'(x)=0 \rightarrow sen(x)=-x\cdot\cos(x)$$

Debemos resolver una ecuación trigonométrica, donde la variable x aparece dentro de la función seno, dentro de la función coseno, y dentro de un polinomio. **¡¡Toma castaña!! ¿Y ahora cómo lo resolvemos?**

Un solución obvia es $x=0$.

¿Y el resto? No nos queda más remedio que aproximar.

Existen métodos matemáticos para estimar el intervalo aproximado donde encontrar soluciones de ecuaciones no exactas. Y estos métodos, en el fondo, van acercándose a las soluciones iterando una y otra vez determinadas operaciones matemáticas (uno de esos métodos, que estudiaremos en 2ºBachillerato, es el Teorema de Bolzano).

Por ahora, basta con aproximar (con ayuda de Geogebra, por ejemplo), estas soluciones y comprender que las funciones elementales se pueden complicar enormemente en el momento que comenzamos a multiplicar, dividir u operar con ellas.

... $(-7{,}98, 0)$, $(-4{,}91, 0)$, $(-2{,}03, 0)$, $(0,0)$, $(2{,}03, 0)$, $(4{,}91, 0)$, $(7{,}98, 0)$ $\ldots$

Donde $(0,0)$ es un mínimo relativo, y a partir de este punto se alternan los máximos y mínimos respectivamente.

Para confirmar estos extremos relativos, y conocer los intervalos de crecimiento, deberíamos evaluar la función derivada en cada uno de los intervalos creados entre dos puntos críticos consecutivos... y eso es telita de trabajo!!

La curvatura se estudia con la segunda derivada.

$$f'(x)=sen(x)+x\cdot\cos(x) \rightarrow f''(x)=\cos(x)+\cos(x)-x\cdot sen(x)=2\cos(x)-x\cdot sen(x)$$
$$f''(x)=0 \rightarrow 2\cos(x)=x\cdot sen(x)$$

Nuevamente las soluciones son aproximadas.

... $(-6{,}58, 0)$, $(-3{,}64, 0)$, $(-1{,}08, 0)$, $(1{,}08, 0)$, $(3{,}64, 0)$, $(6{,}58, 0)$ $\ldots$

Todos estos puntos representan puntos de inflexión (nuevamente deberíamos evaluar la segunda derivada en los distintos intervalos, y confirmar la existencia de estos puntos de inflexión).

Terminemos este "martirio matemático" pidiendo a Geogebra que nos de, por favor, la gráfica de la función.