Teoría – Tema 9

Aplicaciones de la derivada

Índice de contenido

Regla de L'Hôpital en el cálculo de límites

Aunque la definición rigurosa de esta regla, junto a su demostración, será objeto de estudio en 2ºBachillerato, interesa conocer su aplicación práctica para el cálculo de límites.

La regla de L'Hôpital afirma que si al estudiar el límite $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ encontramos la indeterminación $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$, si existe el límite éste coincide con el valor de $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Es decir, derivamos el numerador y el denominador por separado y calculamos el límite resultante.

Repito: esto es solo una aproximación a la regla. Por ahora no vamos a considerar en qué casos se puede aplicar esta regla y en qué casos puede que no exista el límite. Asumiremos, en los límites que encontremos en este curso de 1ºBachillerato, que siempre podremos aplicar L'Hôpital en las indterminaciones $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$.

Esta regla es muy potente, entre otros casos, para calcular límites donde no aparecen polinomios (y que ya hemos estudiado anteriormente).

Ejemplo

Calcular los siguientes límites.

$\lim_{x \to 0} \frac{x}{sen(x)} = \frac{0}{0}$ → Indeterminación → L'Hôpital → Derivamos numerador y denominador por separado → $\lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{x}{e^x - 1} = \frac{0}{0}$ → Indeterminación → L'Hôpital → Derivamos numerador y denominador por separado → $\lim_{x \to 0} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{1} = 1$

$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = \frac{\infty}{\infty}$ → Indeterminación → L'Hôpital → Derivamos numerador y denominador por separado → $\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{1} = \frac{1}{\infty} = 0$

$\lim_{x \to \infty} \frac{2e^x + x}{-3e^x + 4} = \frac{\infty}{-\infty}$ → Indeterminación → L'Hôpital → Derivamos numerador y denominador por separado → $\lim_{x \to \infty} \frac{2e^x + 1}{-3e^x} = \frac{\infty}{-\infty}$ Indeterminación → L'Hôpital → $\lim_{x \to \infty} \frac{2e^x}{-3e^x} = \frac{-2}{3}$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{\cos(x) - 1} = \frac{0}{0}$ → Indeterminación → L'Hôpital → Derivamos numerador y denominador por separado → $\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x+1}}{-sen(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{-1}{(x+1)sen(x)} = \frac{-1}{0} = \infty$ → Y estudiamos los límites laterales para conocer el signo del infinito → $\lim_{x \to 0^-} \frac{-1}{(x+1)sen(x)} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$, $\lim_{x \to 0^+} \frac{-1}{(x+1)sen(x)} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

Recta tangente a la función en un punto

La interpretación geométrica de la derivada afirma que la derivada de la función en un punto coincide con la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto.

Es decir, si tenemos la función $f(x)$ y su derivada es $f'(x)$, la pendiente m de la recta tangente a la función que pase por el punto $A(x_0, y_0)$ será:

$m=f'(x_0)$ → La pendiente es el valor de la derivada evaluada en x_0

Y si tenemos la pendiente m y el punto $A(x_0, y_0)$, podemos escribir la ecuación punto pendiente de la recta tangente a la función en ese punto.

$$m=\frac{y-y_0}{x-x_0}$$

Ejemplo

Calcula la ecuación de la recta tangente a la función $f(x)=x^2-1$ en el punto de abscisa $x=2$.

La derivada de la función será → $f'(x)=2x$ → El valor de la pendiente de la recta tangente en el punto $x=2$ será $m=f'(2)=4$.

El valor del punto $x=2$ en la función será → $f(2)=2^2-1=3$ → Obtenemos el punto $(2,3)$.

La ecuación de la recta tangente a la función en el punto es:

$$m=\frac{y-y_0}{x-x_0} \rightarrow 4=\frac{y-3}{x-2} \rightarrow y=4x-5$$

Ejemplo

Calcula la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la función $f(x)=\frac{1}{x}+\ln(x)$ en el punto de abscisa $x=e$.

La derivada de la función será → $f'(x)=\frac{-1}{x^2}+\frac{1}{x}$ → El valor de la pendiente de la recta tangente en el punto $x=e$ será $m=f'(e)=\frac{-1}{e^2}+\frac{1}{e}=\frac{e-1}{e^2}$.

El valor del punto $x=e$ en la función será $\rightarrow$ $f(e)=\frac{1}{e}+\ln(e)=\frac{1}{e}+1=\frac{1+e}{e}$ $\rightarrow$ Obtenemos el punto $\left(e,\frac{1+e}{e}\right)$.

La ecuación de la recta tangente a la función en el punto es:

$$m=\frac{y-y_0}{x-x_0} \rightarrow \frac{e-1}{e^2}=\frac{y-\frac{1+e}{e}}{x-e}$$

La recta normal es perpendicular a la recta tangente, por lo que el producto de las pendientes de ambas rectas debe ser igual a -1 . Es decir:

$$m_{normal}=\frac{e^2}{1-e}$$

Y la ecuación de la recta normal en el punto $\left(e,\frac{1+e}{e}\right)$ resulta:

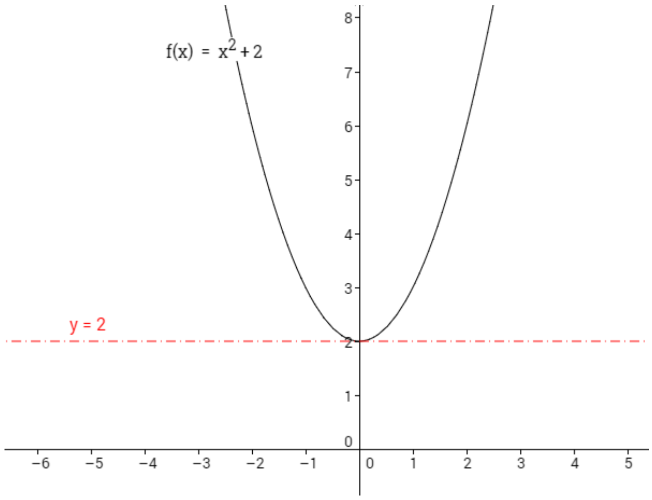
$$\frac{e^2}{1-e}=\frac{y-\frac{1+e}{e}}{x-e}$$

Condición necesaria y suficiente de extremo relativo

A poco que pensemos en la interpretación geométrica de la derivada, nos daremos cuenta que la recta tangente a la función en un punto máximo o mínimo relativo será una recta horizontal (paralela al eje OX).

Es decir, **la derivada de la función evaluada en los puntos de extremo relativo vale** 0 **.**

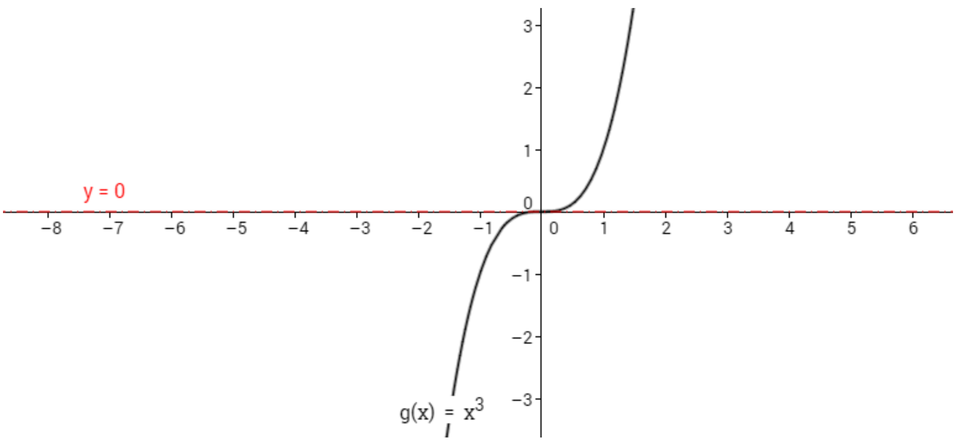
La recta horizontal $y=2$ *es tangente a la función en el mínimo absoluto*



¿Significa esto que en aquellos puntos donde se anule la primera derivada siempre tendremos un extremo relativo?

No. Veámoslo con lo siguiente contraejemplo.

En el punto $(0,0)$ *la recta tangente* $y=0$ *tiene pendiente nula pero no es extremo*



La condición de anular la derivada es una condición necesaria para tener un extremo relativo.

¿Qué significa condición necesaria?

Que todos los extremos relativos la cumplen, pero no todos los punto que anulan la primera derivada son extremos relativos.

Por lo tanto. Si la derivada no se anula, la función no cuenta con extremos relativos. Y si la derivada se anula, debemos buscar una **condición suficiente** para determinar si realmente esos puntos son extremos relativos.

Y vamos a estudiar dos condiciones suficiente de extremos relativos.

Condición necesaria de extremo relativo de la función $f(x)$

Si $f'(x_0)=0 \rightarrow x_0$ es candidato a extremo relativo → se denomina punto crítico

Condición suficiente de extremo relativo: signo de la primera derivada (primera opción)

Si x_0 es punto crítico, y la derivada a la izquierda de x_0 es positiva $f'(x<x_0)>0$ y la derivada a la derecha de x_0 es negativa $f'(x>x_0)<0 \rightarrow x_0$ es un máximo.

Si x_0 es punto crítico, y la derivada a la izquierda de x_0 es negativa $f'(x<x_0)<0$ y la derivada a la derecha de x_0 es positiva $f'(x>x_0)>0 \rightarrow x_0$ es un mínimo.

Si x_0 es punto crítico, y la derivada no cambia de signo a la derecha y a la izquierda del punto crítico, x_0 no es un extremo relativo.

Condición suficiente de extremo relativo: signo de la segunda derivada (segunda opción)

Si x_0 es punto crítico, y la segunda derivada evaluada en x_0 es negativa $f''(x_0)<0 \rightarrow x_0$ es un máximo.

Si x_0 es punto crítico, y la segunda derivada evaluada en x_0 es positiva $f''(x_0)>0 \rightarrow x_0$ es un mínimo.

Si x_0 es punto crítico, y la segunda derivada evaluada x_0 es nula $f''(x_0)=0 \rightarrow$ No podemos concluir nada sobre x_0 y deberemos repetir el razonamiento para derivadas mayores de orden par (cuarta derivada, sexta derivada, etc.).

Veamos unos cuantos ejemplos.

Ejemplo

Estudiar los extremos relativos de $f(x)=x^2+2$.

Derivamos e igualamos a cero → $f'(x)=2x$, $f'(x)=0$ → $x=0$ → punto crítico.

Vamos a aplicar, para practicar, las dos condiciones suficientes de extremo relativo.

A la izquierda de $x=0$ podemos tomar, por ejemplo, $x=-1$ y evaluar la primera derivada → $f'(-1)=-2<0$ → Función decreciente (derivada negativa).

A la izquierda de $x=0$ podemos tomar, por ejemplo, $x=1$ y evaluar la primera derivada → $f'(1)=2>0$ → Función creciente (derivada positiva).

Es decir, en $x=0$ tenemos un **mínimo relativo**.

Otra forma de verlo es aplicando el criterio de la segunda derivada → $f''(x)=2>0$ Positiva para cualquier valor del dominio → $x=0$ es un **mínimo relativo**.

Ejemplo

Estudiar los extremos relativos de $f(x)=x^3$.

Derivamos e igualamos a cero → $f'(x)=3x^2$, $f'(x)=0$ → $x=0$ → punto crítico.

A la izquierda de $x=0$ podemos tomar, por ejemplo, $x=-1$ y evaluar la primera derivada → $f'(-1)=3>0$ → Función creciente (derivada positiva).

A la izquierda de $x=0$ podemos tomar, por ejemplo, $x=1$ y evaluar la primera derivada → $f'(3)=3>0$ → Función creciente (derivada positiva).

Es decir, en $x=0$ **no tenemos extremo relativo, ya que la función es estrictamente creciente a ambos lados de** $x=0$.

Ejemplo

Estudiar los extremos relativos de $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$.

Derivamos e igualamos a cero → $f'(x)=\frac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$, $f'(x)=0$ → $x=0$, $x=2$ → dos puntos críticos.

Debemos evaluar el signo de la primera derivada a ambos lados de los puntos críticos, dándonos cuenta que la función no está definida en $x=1$ (hay una asíntota vertical). Por lo tanto tenemos los siguientes intervalos para tomar valores:

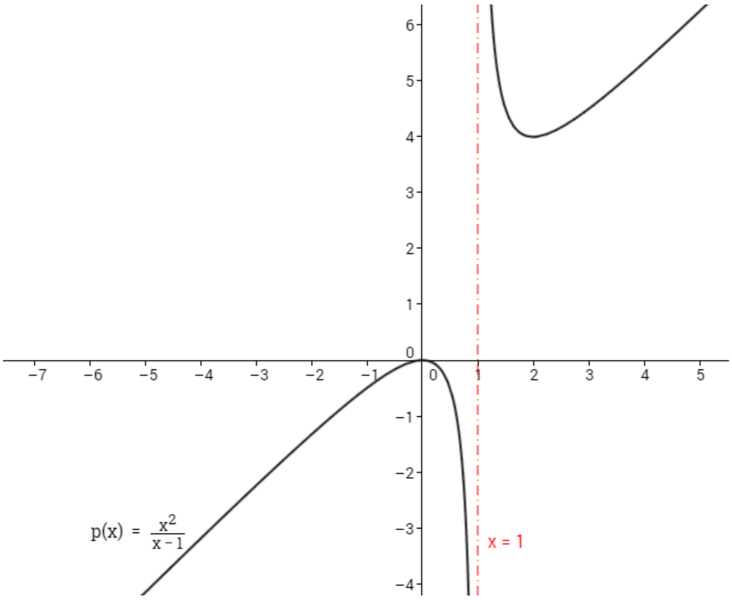
$(-\infty,0)$ → $f'(-1)>0$ → Función creciente (derivada positiva)

$(0,1)$ → $f'(\frac{1}{2})<0$ → Función decreciente (derivada negativa)

$(1,2) \rightarrow f'(\frac{3}{2})<0$ → Función decreciente (derivada negativa)

$(2,\infty) \rightarrow f'(5)>0$ → Función creciente (derivada positiva)

Por lo tanto, tenemos un **máximo relativo en** $x=0$ y un m**ínimo relativo en** $x=2$, como corrobora la siguiente gráfica de Geogebra.



Problemas de optimización

Los problemas de optimización son aquellos en los que debemos cumplir una **condición máxima o mínima**: obtener un polígono de área máxima, el coste de producción mínimo, el tiempo de desplazamiento mínimo, etc. según unos parámetros marcados por el enunciado del problema.

Esta condición de máximo o mínimo se engloba bajo el concepto de optimización. Y analíticamente se trabaja de la misma forma que los extremos relativos: derivar e igualar a cero para obtener los puntos candidatos a máximo o mínimo relativo.

Por lo general estos problemas plantean una función que depende de varias variables $f(x,y,z,...)$, y con los datos del enunciado debemos buscar relaciones entre las variables para conseguir una función que solo dependa de una única variable y que podamos derivar.

Estos problemas son muy complejos, ya que no hay un patrón común para tratarlos... así que nuevamente solo nos queda la opción de practica y practicar.

Ejemplo

Obtener las dimensiones del rectángulo de perímetro $16 \ u$ y área máxima.

La función a maximizar es el área del rectángulo → $A=x\cdot y$

Donde suponemos que la base del rectángulo es x y la altura y . En estos problemas suele ser de ayuda realizar un dibujo previo con la situación que plantea el enunciado.

La función área depende de dos variables, que podemos relacionar con el dato del perímetro → $16=2x+2y$ → $y=8-x$.

Sustituimos este valor en la función área.

$A=x\cdot(8-x)=8x-x^2$

Una vez que la función a optimizar depende de una sola variable, derivamos e igualamos a cero para obtener los candidatos a extremos relativos.

$A'=8-2x$, $A'=0$ → $x=4 \ u$ → $y=4 \ u$

Es decir, obtenemos un cuadrado de lado 4 unidades.

¿Hemos terminado?

Noooooooooo!!!

Debemos demostrar que la función área tiene un máximo en $x=4$, aplicando una de las dos condiciones suficientes estudiadas anteriormente para los puntos críticos.

Si realizamos la segunda derivada → $A'=-2<0$ → $x=4$ es un máximo.