Teoría – Tema 9

Interpretación geométrica de derivada. Definición formal

Índice de contenido

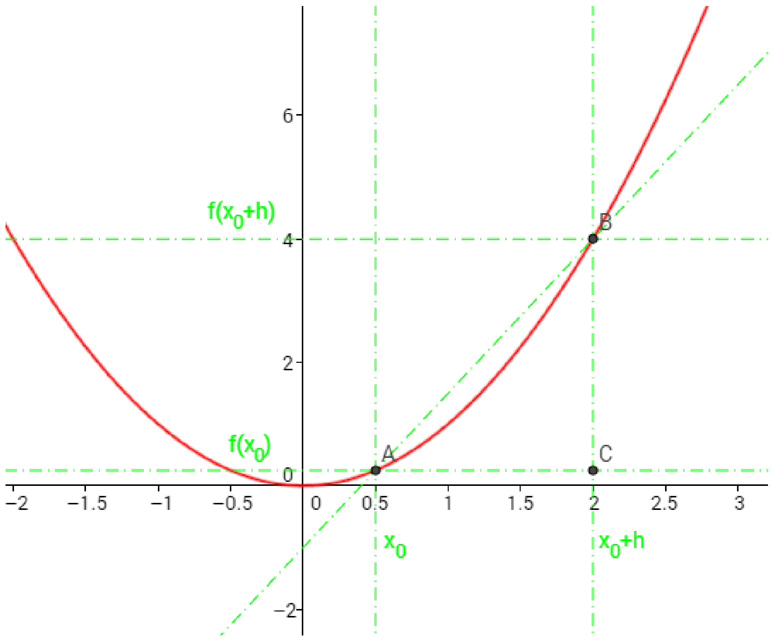
Incremento medio e incremento instantáneo de una función f(x)

Vamos a acercarnos al concepto de derivada de una función. En este curso de 1ºBachillerato lo haremos de una forma intuitiva, buscando coger habilidad al operar con la tabla de derivadas. El próximo curso realizaremos un estudio más formal, incluyendo demostraciones.

Supongamos una función genérica *f(x)* y un punto x_0 perteneciente al dominio de la función. Consideremos una cantidad $h > 0$. Podemos definir el **incremento medio de la función *f(x)*** para el intervalo $[x_0, x_0 + h]$ de la forma:

$$Incremento\ medio\ de\ f(x)\ en\ [x_0, x_0+h] = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x_0+h-x_0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

------- *f(x) arbitrario*



Del triángulo rectángulo *ABC* representado en la gráfica podemos ver el incremento medio de *f(x)* en el intervalo $[x_0, x_0 + h]$ como el cociente entre la altura y la base del triángulo.

Altura $\rightarrow f(x_0 + h) - f(x_0)$

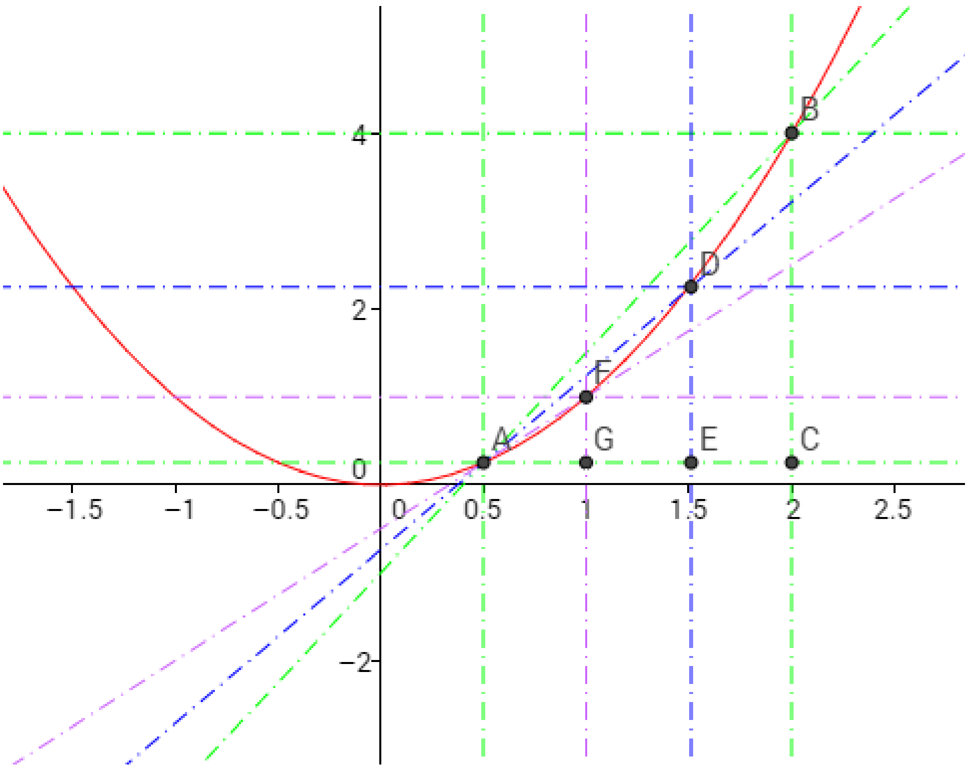
Base $\rightarrow x_0 + h - x_0 = h$

Es más, si consideramos el ángulo del vértice *A* podemos ver el incremento medio de *f(x)* como la tangente del ángulo *A*.

$$tg(A)=\frac{lado\ opuesto}{lado\ contiguo}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Si tomamos valores de *h* cada vez más pequeños, el valor x_0 + *h* se acercará progresivamente a x_0.

------- *f(x) arbitrario*



Es fácil intuir que en el caso límite *h* → *0* tendremos x_0 + *h* → x_0, y la recta que une los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_0+h, f(x_0+h))$ ya no cortará a la gráfica de f(x) en dos puntos sino únicamente en el punto $(x_0, f(x_0))$. Para *h* → *0* ya no hablamos de incremento medio sino de **incremento instantáneo de *f(x)***.

Es decir, en el caso límite *h* → *0* la recta que une los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_0+h, f(x_0+h))$ será tangente a *f(x)* en el punto $(x_0, f(x_0))$ y su pendiente (tangente del ángulo *A*) será igual al valor del incremento instantáneo de f(x).

$$\textit{Incremento instantáneo de } f(x) \textit{ en } x=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Para un punto genérico *x* este incremento instantáneo de *f(x)* es su derivada. Y su **interpretación geométrica nos dice que la derivada de *f(x)* en el punto genérico *x* es igual al valor de la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto *x***.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \leftrightarrow \quad \frac{d[f(x)]}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Esta expresión se conoce como definición formal o analítica de la derivada de *f(x)*. Se demuestra (como haremos el año que viene), que **si una función es derivable en x_0 también será continua en x_0. El inverso, no siempre es cierto**.

Un ejemplo de aplicación de la definición formal de derivada

Vamos a aplicar, a modo de ejemplo, la definición formal de derivada a una función.

Esto lo haremos con asiduidad el próximo curso. Por ahora, nos conformamos con el siguiente ejemplo: aplicar la definición formal de derivada a la función $f(x)=\frac{1}{x}$.

Recordamos la definición analítica de derivada.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Aplicado a nuestra función.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{x-x-h}{x\cdot(x+h)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{-h}{x\cdot(x+h)}}{h}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{x\cdot(x+h)}:\frac{h}{1}=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{xh\cdot(x+h)}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{x\cdot(x+h)}$$

Evaluamos el límite (fíjate que la variable del límite es h y no x).

$$f'(x)=\frac{-1}{x\cdot(x+0)}=\frac{-1}{x^2}$$

Por lo tanto.

$$f'(x)=\frac{-1}{x^2}$$

Realizar este proceso para derivar cualquier función es largo, tedioso y puede convertirse en un proceso nada trivial. Por eso recurriremos a las famosas **tablas de derivación**, para aprender la forma de las derivadas de las funciones y de la composición de funciones más usuales.