Problemas – Tema 9

Solución a problemas de derivadas - Hoja 7 - Todos resueltos

Hoja 7. Problema 1

a) Deriva $f(x)=\frac{-2}{\ln^3(1-2x)}$

$$f'(x)=-2\cdot\frac{-1}{\ln^6(1-2x)}\cdot 3\ln^2(1-2x)\cdot\frac{-2}{1-2x}=-12\cdot\frac{1}{\ln^4(1-2x)}\cdot\frac{1}{1-2x}$$

b) Calcula la ecuación explícita de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de la función $f(x)=arcotg(x)$ **en el punto de valor de abscisa** $x=1$ **.**

De la ecuación punto pendiente de la recta → $m=\frac{y-y_0}{x-x_0}$

$$x_0=1 \quad\to\quad y_0=f(x_0)=f(1)=arcotg(1)=\frac{\pi}{4}$$

$$m=f'(x_0)=f'(1) \quad\to\quad f'(x)=\frac{1}{1+x^2} \quad\to\quad f'(1)=\frac{1}{2}$$

Sustituyendo → $\frac{1}{2}=\frac{y-\frac{\pi}{4}}{x-1} \quad\to\quad \frac{1}{2}x-\frac{1}{2}=y-\frac{\pi}{4} \quad\to\quad y=\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$

Hoja 7. Problema 2

a) Calcula el límite $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x}$

$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \frac{0}{0}$ → indeterminación → L'Hôpital → $\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x+1}}{1} = 1$

b) Calcula la curvatura y los puntos de inflexión de $f(x) = x \cdot e^{\frac{-x}{2}}$

La condición necesaria de punto de inflexión es segunda derivada igual a cero.

$$f'(x) = e^{\frac{-x}{2}} + x \cdot e^{\frac{-x}{2}} \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)$$

$$f''(x) = e^{\frac{-x}{2}} \cdot \left(\frac{-1}{2}\right) + \left(\frac{-1}{2}\right)\left[e^{\frac{-x}{2}} + x \cdot e^{\frac{-x}{2}} \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)\right] = \frac{-1}{2} e^{\frac{-x}{2}} \left[2 - \frac{x}{2}\right]$$

$$f''(x) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{-1}{2} e^{\frac{-x}{2}} \left[2 - \frac{x}{2}\right] = 0$$

Como la exponencial nunca se anula, igualamos a 0 el interior del corchete.

$2 - \frac{x}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad x = 4$ → candidato a punto de inflexión

En la recta real evaluamos la segunda derivada en los intervalo formados por el punto candidato a punto de inflexión y por los puntos que no pertenecen al dominio. Como el dominio de la función son todos los reales, al ser producto de polinomio por exponencial, tendremos los siguientes intervalos:

$(-\infty, 4) \quad \rightarrow \quad f''(-10) < 0$ → función cóncava hacia abajo

$(4, \infty) \quad \rightarrow \quad f''(10) > 0$ → función cóncava hacia arriba

Por lo tanto, $x = 4$ es un punto de inflexión.

Hoja 7. Problema 3

Estudia y representa gráficamente la función $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$

El dominio de la función son todos los reales menos $x=\pm 1$.
La función es par, por lo que es simétrica respecto al eje vertical OY.
Corte con los ejes:

$x=0 \ \rightarrow \ y=0 \ \rightarrow \ (0,1)$
$f(x)=0 \ \rightarrow \ 1=0$ → Absurso matemático → No corta al eje horizontal

Tiene asíntotas verticales en $x=\pm 1$, para lo cual calculamos las asíntotas verticales.

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{1}{x^2-1}=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to -1^+}\frac{1}{x^2-1}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x^2-1}=-\infty \quad , \quad \lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x^2-1}=+\infty$$

Tiene asíntota horizontal en $y=0$ ya que $\lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2-1}=0$. Estudiamos el crecimiento:

$f(x)=\dfrac{1}{x^2-1} \ \rightarrow \ f'(x)=\dfrac{-2x}{(x^2-1)^2}$, $f'(x)=0 \ \rightarrow \ x=0$ → punto crítico

En la recta real colocamos el punto crítico $x=0$ y los puntos $x=\pm 1$ que no pertenecen al dominio.

$(-\infty,-1) \ \rightarrow \ f'(-10)>0$ → función creciente
$(-1,0) \ \rightarrow \ f'(-1/2)>0$ → función creciente
$(0,1) \ \rightarrow \ f'(1/2)<0$ → función decreciente
$(1,\infty) \ \rightarrow \ f'(10)<0$ → función decreciente

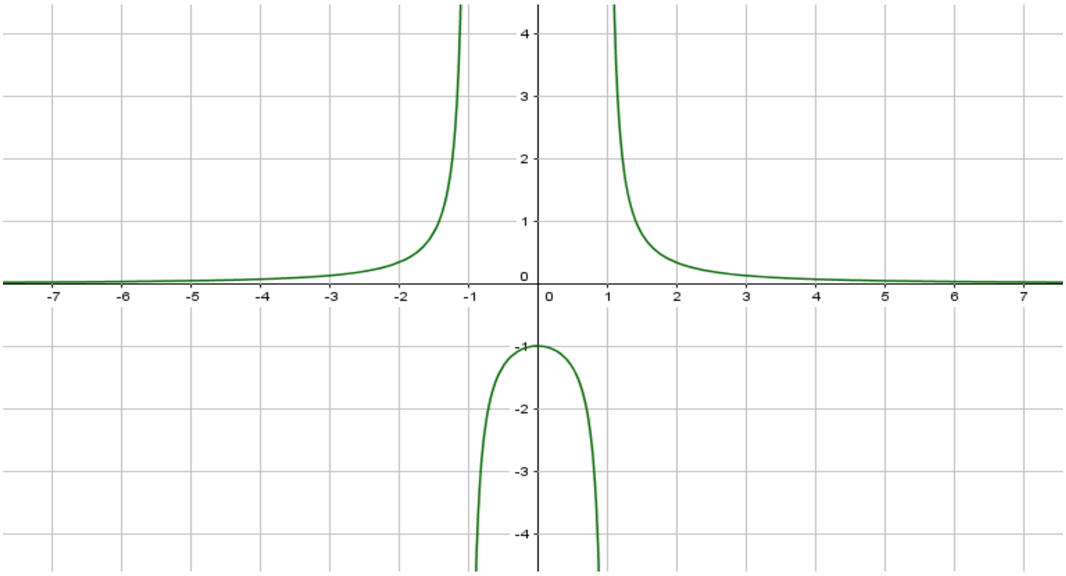
Por lo tanto, en $x=0$ tenemos un máximo relativo. Estudiamos la curvatura con la segunda derivada.

$$f'(x)=\frac{-2x}{(x^2-1)^2} \ \rightarrow \ f'(x)=\frac{-2(x^2-1)^2+2x\cdot 2(x^2-1)(2x)}{(x^2-1)^4}=\frac{6x^2+2}{(x^2-1)^3}$$

La condición necesaria de punto de inflexión es segunda derivada igual a cero. Por lo tanto:

$6x^2+2=0$ → No existe solución real → No hay puntos de inflexión → En la recta real evaluamos la segunda derivada en los intervalos formados por los puntos donde la función no está definida.

$(-\infty,-1) \ \rightarrow \ f'(-10)>0$ → función cóncava hacia arriba
$(-1,1) \ \rightarrow \ f''(0)<0$ → función cóncava hacia abajo
$(1,\infty) \ \rightarrow \ f''(10)>0$ → función cóncava hacia arriba


-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4

Hoja 7. Problema 4

Una compañía de cruceros ofrece un viaje para al menos 100 personas por un precio inicial de 2000 euros por persona.
Para animar las ventas decide rebajar el precio inicial en 10 euros por cada persona que rebase las 100. Así pues, si se apuntaran 120 personas, cada uno pagará 2000 – 20·10 = 1800 euros.

Calcula el número de personas que maximiza los ingresos de la compañía y el valor de dicho ingreso máximo (ayuda: el ingreso es el dinero total obtenido por la compañía).

Los ingresos es la suma del precio de todos los billetes vendidos.
Los 100 primeros generarán un ingreso de $100\cdot 2000=200000\,€$
A partir de la primera persona que supere el número 100, el precio de cada billeta desciende 10 euros. Si x es el número de personas que supera el número 100, el dinero que generan será $x\cdot(2000-x\cdot 100)$
Por lo tanto, el ingreso total será:

$$I=200000+x(2000-x\cdot 100)=200000+2000x-10x^2$$

Esta es la función a optimizar, con la condición necesaria de extremo relativa (primera derivada nula).

$I'=2000-20x$, $I'=0 \rightarrow x=100$ → punto crítico

Comprobamos que tenemos un máximo relativo de los ingresos con la segunda derivada.

$I''=-20<0 \rightarrow x=100$ maximiza los beneficios → El total de viajeros será:

$100+100=200\ personas$

Hoja 7. Problema 5

a) Indica los intervalos de crecimiento, decrecimiento y los extremos relativos de $f(x)=\ln(1-x^2)$

pendiente de resolver

b) Calcula $\lim_{x\to\infty}\frac{4e^x+x+2}{3e^x}$

Al evaluar obtenemos la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ → Aplicamos L'Hôpital

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4e^x+x+2}{3e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{4e^x+1}{3e^x}=\frac{\infty}{\infty}$$ → Aplicamos L'Hôpital

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4e^x+1}{3e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{4e^x}{3e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{3}=\frac{4}{3}$$

Hoja 7. Problema 6

Aplica la definición formal de derivada a $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

El dominio de la función son todos los reales salvo los que hacen negativo o cero el argumento de la raíz, ya que no existen raíces de números negativos ni podemos dividir por cero.

$$x^2-1=0 \quad \rightarrow \quad x=-1, x=1 \quad \rightarrow \quad Dom(f)=(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$$

La función es par, por lo que hay simetría respecto al eje de ordenadas. La función no corta a los ejes, ya que $x=0 \notin Dom(f)$ y para $f(x)=0 \quad \rightarrow \quad 1=0$ $\rightarrow$ Absurdo matemático.

Los candidatos a asíntota vertical son los puntos frontera de los intervalos que delimitan el dominio, por lo tanto:

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{0^+}=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to -1^+}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}=\nexists \quad \rightarrow \quad x=-1 \quad \text{Asíntota vertical por la izquierda}$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}=\nexists \quad , \quad \lim_{x\to 1^+}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{0^+}=+\infty \quad \rightarrow \quad x=1 \quad \text{Asíntota vertical por la derecha}$$

La asíntota vertical se determina estudiando el límite de la función en el infinito.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{\infty}=0 \quad \rightarrow \quad y=0 \quad \text{Asíntota horizontal} \rightarrow \text{No habrá asíntota oblicua}$$

Para conocer los extremos relativos y los intervalos de crecimiento, estudiamos la primera derivada.

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad \rightarrow \quad f'(x)=\frac{\frac{-2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2}=\frac{-x}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}=\frac{-x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f'(x)=0 \quad \rightarrow \quad x=0 \notin Dom(f) \quad \rightarrow \text{No existen puntos críticos}$$

Evaluamos la primera derivada en los intervalos del dominio.

$$(-\infty,-1) \quad \rightarrow \quad f'(-100)>0 \quad \rightarrow \quad f(x) \quad \text{creciente}$$

$$(1,\infty) \quad \rightarrow \quad f'(100)<0 \quad \rightarrow \quad f(x) \quad \text{decreciente}$$

La curvatura la estudiamos con la segunda derivada.

$$f'(x)=\frac{-x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$$

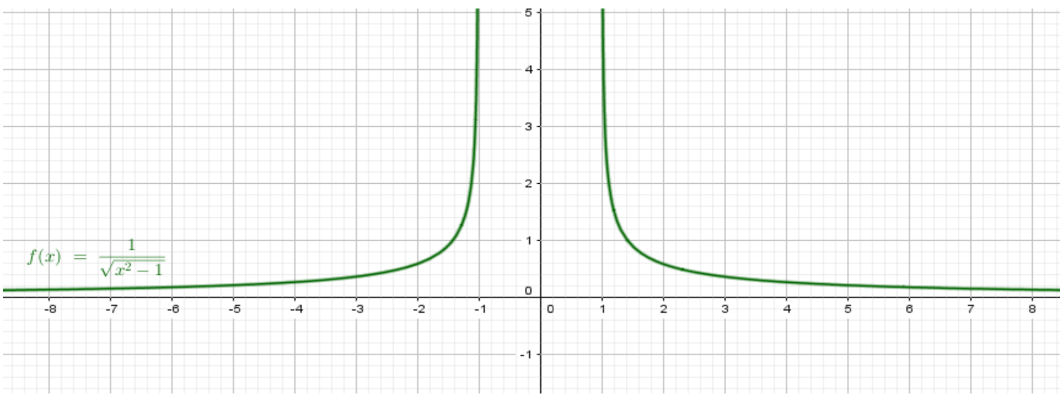
$$f''(x)=\frac{-(x^2-1)^{\frac{3}{2}}+x\cdot\frac{3}{2}(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\cdot 2x}{(x^2-1)^3}=\frac{-(x^2-1)+3x^2}{(x^2-1)^{\frac{5}{2}}}=\frac{2x^2+1}{(x^2-1)^{\frac{5}{2}}}$$

$f''(x)=0 \;\rightarrow\; x^2=\frac{-1}{2}\notin\mathbb{R}$ → No existen candidatos a puntos de inflexión.

Evaluamos la segunda derivada en los intervalos del dominio.

$(-\infty,-1) \;\rightarrow\; f'(-100)>0 \;\rightarrow\; f(x)$ cóncava hacia arriba U

$(1,\infty) \;\rightarrow\; f''(100)>0 \;\rightarrow\; f(x)$ cóncava hacia arriba U



Hoja 7. Problema 7

Estudia y representa gráficamente la función $f(x)=\frac{x+1}{e^x}$

El dominio de la función son todos los reales, ya que el denominador nunca se anula, y tanto numerador (polinomio) como denominador (exponencial) son funciones cuyo dominio es toda la recta real.

La función no es par ni impar.

Los puntos de corte con los ejes son:

$$x=0 \rightarrow f(0)=\frac{0+1}{1}=1 \rightarrow (0,1)$$

$$y=0 \rightarrow f(x)=0 \rightarrow x=-1 \rightarrow (-1,0)$$

Si el dominio es toda la recta real, no tendremos asíntotas verticales.

La asíntota horizontal se estudia con el límite en el infinito de la función.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{e^x}=\frac{\infty}{\infty} \rightarrow \text{Indeterminación} \rightarrow \text{L'Hôpital} \rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}=\frac{1}{\infty}=0 \rightarrow y=0 \quad \text{Asíntota horizontal}$$

En consecuencia, no tendremos asíntota oblicua.

Derivamos para estudiar el crecimiento y los extremos relativos.

$$f(x)=\frac{x+1}{e^x} \rightarrow f'(x)=\frac{e^x-(x+1)e^x}{(e^x)^2}=\frac{-x}{e^x}$$

$$f'(x)=0 \rightarrow x=0 \rightarrow \text{Punto crítico (candidato a extremos relativo)}$$

Evaluamos la primera derivada en los siguientes intervalos.

$$(-\infty,0) \rightarrow f'(-100)>0 \rightarrow f(x) \text{ creciente}$$

$$(0,\infty) \rightarrow f'(100)<0 \rightarrow f(x) \text{ decreciente}$$

Por lo tanto, en $x=0$ tenemos un máximo relativo. La curvatura la estudiamos con la segunda derivada.

$$f'(x)=\frac{-x}{e^x} \rightarrow f''(x)=\frac{-e^x+x e^x}{(e^x)^2}=\frac{-1+x}{e^x}$$

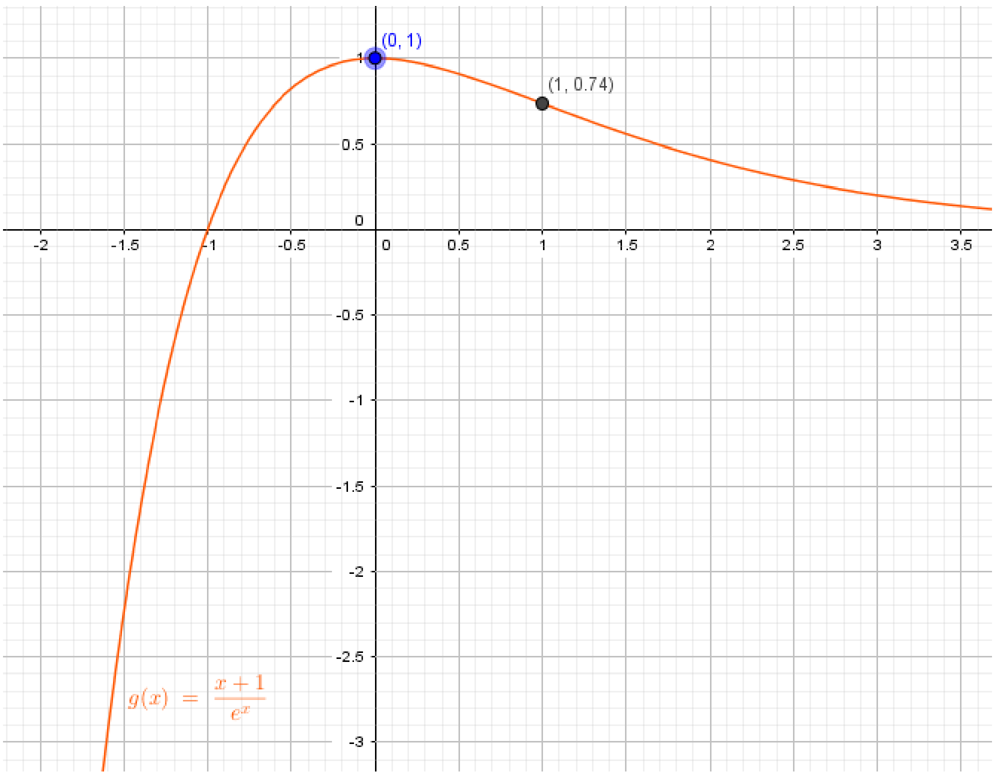
$f''(x)=0 \quad \rightarrow \quad x=1$ → Candidato a punto de inflexión

Evaluamos la segunda derivada en los siguientes intervalos.

$(-\infty, 1) \quad \rightarrow \quad f''(-100)<0 \quad \rightarrow \quad f(x)$ cóncava hacia abajo ∩

$(0, \infty) \quad \rightarrow \quad f''(100)>0 \quad \rightarrow \quad f(x)$ cóncava haia arriba U

En $x=1$ tendremos un punto de inflexión.



Hoja 7. Problema 8

a) Determina los valores a, b, c de la función $f(x)=ax^2+bx+c$ para que tenga un mínimo relativo en $x=2$, pase por el punto $P(0,5)$ y se cumpla que $f'(1)=2$.

Si tengo un mínimo en un punto, la derivada de la función en ese punto se anula.

$$f'(x)=2ax+b \rightarrow f'(2)=0 \rightarrow 4a+b=0$$

Si la función pasa por un punto, las coordenadas del punto satisfacen la ecuación de la función.

$$f(0)=5 \rightarrow c=5$$

Y al tercera condición la aplicamos de forma directa.

$$f'(1)=2 \rightarrow 2a+b=2$$

Resolvemos el sistema 2x2 que nos queda.

$$2a+b=2 \rightarrow b=2-2a$$

Lo llevo a la primera ecuación.

$$4a+b=0 \rightarrow 4a+2-2a=0 \rightarrow a=-1$$

Y por lo tanto:

$$b=4$$

b) Determina en qué punto de la gráfica de la función $f(x)=3\sqrt{6x}$, la recta tangente forma un ángulo de 45^o con el eje de abscisas.

La tangente de 45^o nos da la pendiente de la recta tangente a la función → $m=tg(45^o)=1$.

Hacemos la primera derivada e igualamos a 1.

$$f'(x)=1 \rightarrow f'(x)=3\frac{6}{2\sqrt{6x}}=\frac{9}{\sqrt{6x}} \rightarrow \frac{9}{\sqrt{6x}}=1 \rightarrow 9=\sqrt{6x} \rightarrow x=\frac{81}{36}=\frac{9}{4}$$

El punto será $\left(\frac{9}{4}, f\left(\frac{9}{4}\right)\right)=\left(\frac{9}{4}, 9\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$