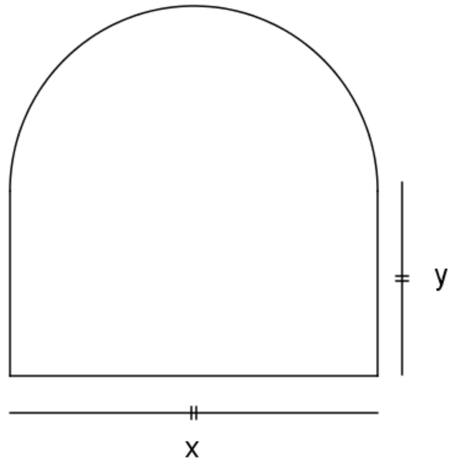
Problemas – Tema 9

Solución a problemas de derivadas - Hoja 5 - Problemas 3, 4

Hoja 5. Problema 3

3. Sea una ventana cuya parte inferior es un rectángulo y la superior un semicírculo. Si el perímetro de la ventana es de $6m$, calcula las dimensiones de la ventana para que entre la cantidad de luz máxima.

Un dibujo ayuda mucho en los problemas de optimización.



La luz que entra será máxima si maximizamos el área de la ventana.

$x=2r \rightarrow r$ es el radio de la semicircunferencia

$A_{rectángulo}=(2r)\cdot y$

$A_{semicircunferencia}=\pi\cdot r^2$

$A_{total}=A_{rectángulo}+A_{semicircunferencia}=2r\,y+\pi r^2$

Con los datos del enunciado sobre el perímetro buscamos una relación entre las variables r, y .

$$P=6 \quad , \quad P=2r+2y+\pi r \quad \rightarrow \quad 6=(\pi+2)r+2y \quad \rightarrow \quad \frac{6-(\pi+2)r}{2}=y$$

Llevamos este resultado a la función área.

$$A=2r\frac{6-(\pi+2)r}{2}+\pi r^2 \quad\rightarrow\quad A=6r-(\pi+2)r^2+\pi r^2 \quad\rightarrow\quad A=6r-2r^2$$

La condición necesaria de extremo relativo es primera derivada igual a cero.

$A'=0 \quad\rightarrow\quad 6-4r=0 \quad\rightarrow\quad r=\frac{3}{2}$ → punto crítico

Comprobamos si es un máximo evaluando la segunda derivada en el punto crítico.

$A''=-4<0\ \forall r\in Dom(A) \quad\rightarrow\quad r=\frac{3}{2}$ es un máximo de la función área.

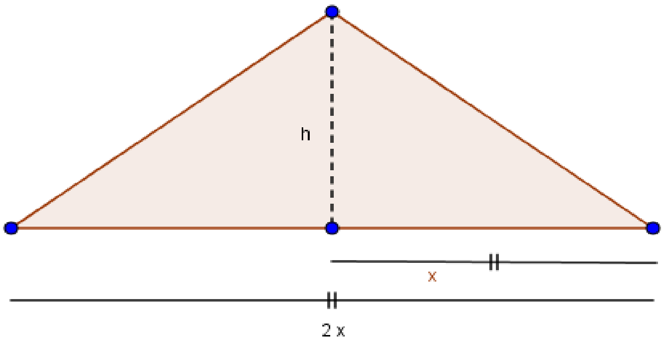
$$x=2r \quad\rightarrow\quad x=3\ m$$

$$\frac{6-(\pi+2)r}{2}=y \quad\rightarrow\quad \frac{6-(\pi+2)\frac{3}{2}}{2}=y \quad\rightarrow\quad y=\frac{6-3\pi}{4}\ m$$

Hoja 5. Problema 4

4. Encuentra la base y la altura del triángulo isósceles de perímetro $50\,cm$ que tenga la mayor área posible.

Dibujamos un triángulo isósceles con la base como lado desigual, y los otros dos lados iguales.



La función área maximizar será → $A=\frac{1}{2}(2x)h=x\cdot h$

Relacionamos la base y la altura con el dato del perímetro, sabiendo que la longitud de los lados iguales podemos obtenerla por Pitágoras en uno de los dos triángulos rectángulos en que la altura divide al triángulo isósceles.

$$lado=\sqrt{x^2+h^2} \quad \rightarrow \quad Perímetro=2x+2\,lado=2x+2\sqrt{x^2+h^2}$$

$$50=2x+2\sqrt{x^2+h^2} \quad \rightarrow \quad 25=x+\sqrt{x^2+h^2} \quad \rightarrow \quad (25-x)^2=x^2+h^2$$

$$625-x^2-50x=x^2+h^2 \quad \rightarrow \quad h=\sqrt{-2x^2-50x+625}$$

Llevamos este resultado a la función área.

$$A=x\cdot\sqrt{-2x^2-50x+625}=\sqrt{-2x^4-50x^3+625x^2}$$

La condición necesaria de extremo relativo es primera derivada nula.

$$A'=0 \quad \rightarrow \quad A'=\frac{-8x^3-150x^2+1250x}{2\sqrt{-2x^4-50x^3+625x^2}} \quad \rightarrow \quad -8x^3-150x^2+1250x=0$$

$$-x(8x^2+150x-1250)=0 \quad \rightarrow \quad x=0 \quad , \quad x=-25 \quad , \quad x=\frac{25}{4}$$

Tenemos tres puntos críticos, donde tiene sentido físico que estudiemos el valor $x=\frac{25}{4}$ por ser la única distancia positiva de los tres valores.

Derivar la primera derivada se antoja algo engorroso, por lo que vamos a aplicar la condición suficiente de evaluar la primera derivada para determinar si estamos ante un máximo relativo.

Para ello debemos representar en la recta real los puntos críticos y los puntos frontera de los intervalos que no pertenecen al dominio de la función. Con estos puntos, tendremos los intervalos donde evaluar la derivada.

La función área original es:

$$A=x\cdot\sqrt{-2x^2-50x+625}$$

Debemos ver qué valores de x hacen positivo el argumento de la raíz.

$$-2x^2-50x+625\geq 0 \quad\rightarrow\quad x\in\left[\frac{-25\sqrt{3}-25}{2},\frac{25\sqrt{3}-25}{2}\right]$$

Tendremos los siguientes intervalos alrededor del punto crítico $x=\frac{25}{4}$.

$$\left(0,\frac{25}{4}\right) \quad\rightarrow\quad A'(1)>0 \quad\rightarrow\quad A(x) \text{ creciente}$$

$$\left(\frac{25}{4},\frac{25\sqrt{3}-25}{2}\right) \quad\rightarrow\quad A'(7)<0 \quad\rightarrow\quad A(x) \text{ decreciente}$$

Por lo tanto $x=\frac{25}{4}$ es un máximo relativo del área del triángulo.

$$base=2x \quad\rightarrow\quad base=\frac{25}{2}\ m$$

$$altura=h=\sqrt{-2x^2-50x+625} \quad\rightarrow\quad h=15{,}31\ m$$