Problemas – Tema 9

Solución a problemas de derivadas - Hoja 2 - Todos resueltos

Hoja 2. Problema 1

1. a) Deriva y simplifica $f(x)=\dfrac{-2}{\ln^3(1-2x)}$

b) Deriva y simplifica $f(x)=\ln\left(e^{tg(x)}\cdot\sqrt[3]{\cos^2(x)}\right)$

c) Estudia intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)=\dfrac{1}{1+x+x^2}$

a) $f(x)=\dfrac{-2}{\ln^3(1-2x)} \rightarrow f'(x)=-2\dfrac{-3\ln^2(1-2x)\cdot\dfrac{1}{1-2x}\cdot(-2)}{\ln^6(1-2x)}$

$$f'(x)=\frac{-12}{(1-2x)\ln^4(1-2x)}$$

b) $f(x)=\ln\left(e^{tg(x)}\cdot\sqrt[3]{\cos^2(x)}\right)$

Esta derivada podemos realizarla de dos formas.

La primera es derivando directamente el logaritmo neperiano.

$$f'(x)=\frac{e^{tg(x)}\cdot\dfrac{1}{\cos^2(x)}\cdot\sqrt[3]{\cos^2(x)}+e^{tg(x)}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot(\cos(x))^{\frac{-1}{3}}\cdot(-sen(x))}{e^{tg(x)}\cdot\sqrt[3]{\cos^2(x)}}$$

$$f'(x)=\frac{\dfrac{\sqrt[3]{\cos^2(x)}}{\cos^2(x)}-\dfrac{2}{3}\dfrac{sen(x)}{\sqrt[3]{\cos(x)}}}{\sqrt[3]{\cos^2(x)}} \rightarrow f'(x)=\frac{\dfrac{1}{\sqrt[3]{\cos^4(x)}}-\dfrac{2}{3}\dfrac{sen(x)}{\sqrt[3]{\cos(x)}}}{\sqrt[3]{\cos^2(x)}}$$

$$f'(x)=\frac{1-\dfrac{2}{3}sen(x)\sqrt[3]{\cos^3(x)}}{\cos^2(x)} \rightarrow f'(x)=sec^2(x)-\frac{2}{3}\frac{sen(x)}{\cos(x)}$$

$$f'(x)=sec^2(x)-\frac{2}{3}\cdot tg(x)$$

La segunda forma es, antes de derivar, romper el logaritmo del producto en la suma de logaritmos.

$$f(x)=\ln\left(e^{tg(x)}\cdot\sqrt[3]{\cos^2(x)}\right) \rightarrow f(x)=tg(x)+\ln\left(\sqrt[3]{\cos^2(x)}\right) \rightarrow f(x)=tg(x)+\frac{2}{3}\ln(\cos(x))$$

$$f'(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}-\frac{2}{3}\cdot\frac{sen(x)}{\cos(x)} \rightarrow f'(x)=sec^2(x)-\frac{2}{3}\cdot tg(x)$$

En ambos casos, llegamos al mismo resultado.

c) $f(x)=\dfrac{1}{1+x+x^2}$

El dominio de la función son todos los reales, ya que el denominador nunca se anula para los reales.

$$f'(x)=\frac{-(1+2x)}{(1+x+x^2)^2} \quad , \quad f'(x)=0 \rightarrow x=\frac{-1}{2}$$

$(-\infty,\frac{-1}{2}) \rightarrow f'(-10)>0 \rightarrow f(x)$ creciente

$(\frac{-1}{2},+\infty) \rightarrow f'(0)<0 \rightarrow f(x)$ decreciente

Hoja 2. Problema 2

2. a) Determina el punto (x, y) de la función $f(x)=x^3-x$ donde la recta tangente a la función en ese punto tenga pendiente igual a 74 .

b) Calcula a y b para que la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+2$ pase por el punto $(-1,6)$ y su recta tangente en $x=1$ forme un ángulo de 45^o con el eje OX.

a) La derivada de la función en un punto coincide con la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto. Por lo tanto:

$$f(x)=x^3-x \quad \rightarrow \quad f'(x)=3x^2-1 \quad , \quad f'(x)=74 \quad \rightarrow \quad 3\mathrm{x}^2-1=74 \quad \rightarrow \quad x^2=25 \quad \rightarrow \quad x=\pm 5$$

Los puntos solución son:

$(-5,-120)$ y $(5,120)$

b) Si la función pasa por el punto $(-1,6)$ se cumple la relación:

$$f(-1)=6 \quad \rightarrow \quad -1+a-b+2=6 \quad \rightarrow \quad a-b=5$$

Por otro lado, la derivada en $x=1$ es igual a 1 ($tg(45^o)=1$). Es decir.

$$f'(x)=3x^2+2ax+b \quad , \quad f'(1)=1 \quad \rightarrow \quad 3+2a+b=1 \quad \rightarrow \quad 2a+b=-2$$

Llegamos al siguiente sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas.

$$\left\{ \begin{array}{c} a-b=5 \\ 2a+b=-2 \end{array} \right\} \rightarrow \text{Sumamos} \rightarrow \quad 3a=3 \quad \rightarrow \quad a=1 \quad \rightarrow \quad b=-4$$

Hoja 2. Problema 3

3. Estudia y representa gráficamente la función $f(x)=\frac{1}{\ln(x)}$

La función está definida para los reales positivos menos el 1 , donde se anula el denominador. Con esto los argumentos del logaritmo nunca son negativos o nulos.

$$Dom(f)=(0,+\infty)-\{1\}$$

La función no es simétrica ni periódica.

Estudiamos las posibles asíntotas verticales en $x=0$ y $x=1$.

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{\ln(x)}=\nexists$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\ln(x)}=\frac{1}{-\infty}=0$$

En $x=0$ encontramos una discontinuidad no evitable de segunda especie, pero no hay asíntota vertical.

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{\ln(x)}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{\ln(x)}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

En $x=1$ hay asíntota vertical.

Estudiamos la asíntota horizontal.

$\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{\ln(x)}=\frac{1}{\infty}=0$ → Asíntota horizontal en $y=0$

Al haber horizontal no hay asíntota oblicua.

Calculamos la función derivada para estudiar la monotonía y los extremos relativos.

$f'(x)=\frac{-1}{x\ln^2(x)}$, $f'(x)=0 \rightarrow -1=0$ → Absurdo matemático → No hay extremos relativos.

Estudiamos el crecimiento y decrecimiento en los siguientes intervalos.

$(0,1) \rightarrow f'(\frac{1}{2})<0 \rightarrow f(x)$ decreciente

$(1,+\infty) \rightarrow f'(10)<0 \rightarrow f(x)$ decreciente

La función es estrictamente decreciente en todo su dominio de definición.

Para la curvatura realizamos la segunda derivada.

$$f''(x)=\frac{\ln^2(x)+x\cdot 2\cdot\ln(x)\cdot\frac{1}{x}}{x^2\ln^4(x)}=\frac{\ln(x)+2}{x^2\ln^3(x)} \quad , \quad f''(x)=0 \rightarrow \ln(x)=-2 \rightarrow x=e^{-2}$$

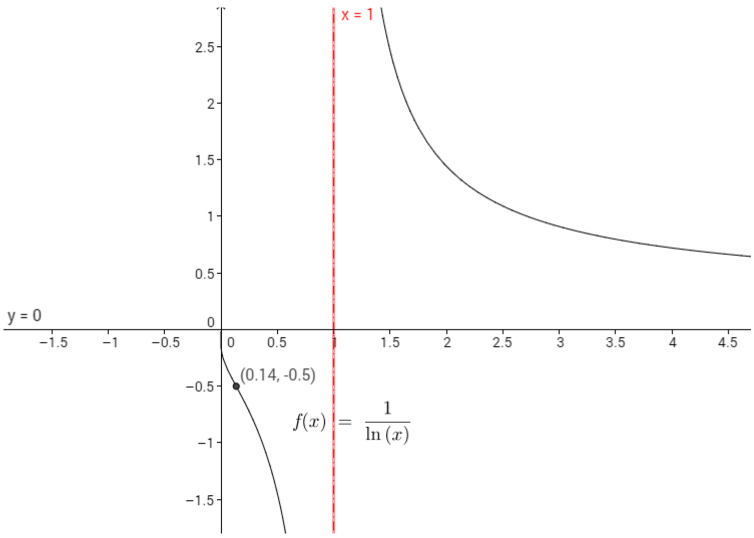
Poseemos un candidato a punto de inflexión en $\left(\frac{1}{e^2}, f\left(\frac{1}{e^2}\right)\right)=(0{,}14 \ , \ -0{,}5)$

$(0, \ 0{,}14) \ \rightarrow \ f''(0{,}1)>0 \ \rightarrow \ f(x)$ cóncava hacia arriba U

$(0{,}14 \ ,1) \ \rightarrow \ f'(0{,}5)<0 \ \rightarrow \ f(x)$ cóncava hacia abajo ∩

$(0{,}14 \ ,+\infty) \ \rightarrow \ f''(10)>0 \ \rightarrow \ f(x)$ cóncava hacia arriba U

En $(0{,}14 \ , \ -0{,}5)$ existe un punto de inflexión.



Hoja 2. Problema 4

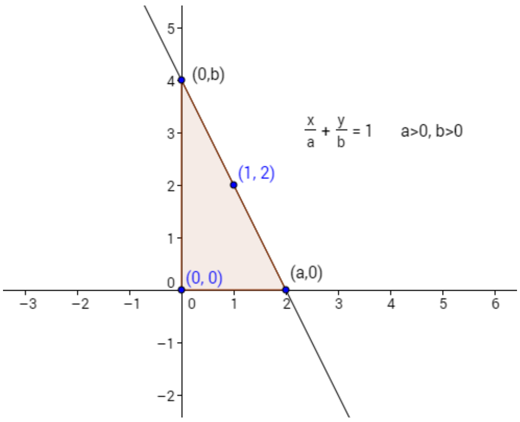
4. Encontrar, de entre todas las rectas que pasan por el punto $(1,2)$, aquella que forma con la partes positivas de los ejes de coordenadas un triángulo de área mínima. Obtener dicha área mínima.

Podemos resolver este problema a partir de dos formas de expresar la ecuación de la recta.

Un primer procedimiento sería trabajar con la ecuación canónica de la recta, que relaciona entre sí a los puntos de corte de la recta con los ejes de coordenadas.

$$r:\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \quad \rightarrow \quad (a,0),(0,b)\in r$$

Con $a>0, b>0$ para nuestro problema, ya que la recta pasa por el punto $(1,2)$ y corta a los semiejes positivos de coordenadas formando un triángulo. Por lo que la pendiente de la recta será negativa (ver imagen).



El área del triángulo rectángulo formado por la recta y los ejes cartesianos se expresa:

$$A=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b$$

Y esta es la función que debemos optimizar para buscar su máximo relativo.

La función depende de dos variables. ¿Cómo podemos relacionar ambas variables, para dejar A en función de una sola variable?

Con ayuda de la ecuación de la recta, que pasa por el punto $(1,2)$.

$$r:\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \quad , \quad (1,2)\in r \quad \rightarrow \quad \frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{a}=1-\frac{2}{b} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{a}=\frac{b-2}{b} \quad \rightarrow \quad a=\frac{b}{b-2}$$

Llevamos esta relación a la ecuación del área del triángulo.

$$A=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b \quad \rightarrow \quad A=\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{b-2}\cdot b \quad \rightarrow \quad A=\frac{1}{2}\cdot\frac{b^2}{b-2}$$

El dominio de la función es $Dom(A)=\mathbb{R}-\{2\}$. Y según la condiciones de nuestro enunciado, solo tienen sentido valores positivos de b , ya que la recta solo corta al eje OY en su semieje positivo.

Derivamos e igualamos a cero la función.

$$A'=\frac{1}{2}\cdot\frac{2b(b-2)-b^2}{(b-2)^2} \rightarrow A'=\frac{1}{2}\cdot\frac{2b^2-4b-b^2}{(b-2)^2} \rightarrow A'=\frac{1}{2}\cdot\frac{b^2-4b}{(b-2)^2}$$

$$A'=0 \rightarrow b^2-4\text{b}=0 \rightarrow b=0 \ , \ b=4$$

Tenemos dos puntos candidatos a extremos relativos. Vamos a evaluar la derivada en los siguientes intervalos, para decidir si son máximos o mínimos.

$$(-\infty,0) \rightarrow A'(-10)>0$$

$$(0,2) \rightarrow A'(1)<0$$

$$(2,4) \rightarrow A'(3)<0$$

$$(4,+\infty) \rightarrow A'(5)>0$$

En $b=0$ la función presenta un máximo relativo (aunque este valor no lo contemplamos realmente, según las condiciones de nuestro enunciado), y en $b=4$ aparece un mínimo relativo (que también es absoluto si nos cernimos a valores positivos de b, que son lo que tienen sentido en nuestro problema).

Por lo tanto, si $b=4 \rightarrow a=2 \rightarrow A=4 \ u^2$

La ecuación de la recta resulta:

$$r:\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1 \rightarrow r: y=-2x+4$$

Otra forma de resolver el problema es partiendo de una ecuación de la recta donde aparezca explícitamente su pendiente. Por ejemplo, la ecuación explícita.

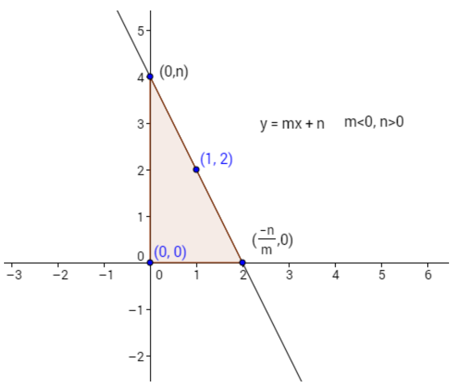
$$r: y=mx+n$$

Los puntos de corte de esta recta con los ejes cartesianos son:

$$x=0 \rightarrow y=n \rightarrow (0,n)$$

$$y=0 \rightarrow x=\frac{-n}{m} \rightarrow (\frac{-n}{m},0)$$

Con $m<0, n>0$ según las condiciones del problema, ya que la recta es de pendiente negativa (ver imagen).



Según esto, el área del triángulo podemos expresarla:

$$A=\frac{1}{2}\cdot\frac{n^2}{|m|}$$

Donde hemos tomado valor absoluto en la variable $m<0$ para garantizar un área positiva. Podemos quitar el valor absoluto para $m<0$ de la siguiente forma:

$$A=\frac{-1}{2}\cdot\frac{n^2}{m}$$

Llegamos a una función que depende de dos variables. Podemos relacionarlas con la ecuación explícita de la recta.

$$r: y=m\,x+n \quad , \quad (1,2)\in r \quad \rightarrow \quad 2=m+n \quad \rightarrow \quad m=2-n$$

Llevando este resultado a la expresión del área:

$$A=\frac{-1}{2}\cdot\frac{n^2}{2-n} \quad \rightarrow \quad A=\frac{1}{2}\cdot\frac{n^2}{n-2}$$

Esta es la expresión a optimizar, que coincide formalmente con la que trabajamos en el primer método de la ecuación canónica $A=\frac{1}{2}\cdot\frac{b^2}{b-2}$. Por lo que los resultados serán análogos, ahora para las variables m y n de la ecuación explícita:

$$n=4 \quad \rightarrow \quad m=-2 \quad \rightarrow \quad A=4\ u^2$$

Donde $n=4$ es un mínimo relativo de la función $A=\frac{1}{2}\cdot\frac{n^2}{n-2}$.

Y llegamos a la ecuación de la recta solución, que coincide con la obtenida en el primer método.

$$r: y=-2x+4$$