

## Problemas – Tema 9

# Solución a problemas de derivadas - Hoja 2 - Todos resueltos

### Hoja 2. Problema 1

1. a) Deriva y simplifica  $f(x) = \frac{-2}{\ln^3(1-2x)}$

b) Deriva y simplifica  $f(x) = \ln(e^{tg(x)} \cdot \sqrt[3]{\cos^2(x)})$

c) Estudia intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función  $f(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$

$$a) f(x) = \frac{-2}{\ln^3(1-2x)} \rightarrow f'(x) = -2 \frac{-3 \ln^2(1-2x) \cdot \frac{1}{1-2x} \cdot (-2)}{\ln^6(1-2x)}$$

$$f'(x) = \frac{-12}{(1-2x)\ln^4(1-2x)}$$

b)  $f(x) = \ln(e^{tg(x)} \cdot \sqrt[3]{\cos^2(x)})$

Esta derivada podemos realizarla de dos formas.

La primera es derivando directamente el logaritmo neperiano.

$$f'(x) = \frac{e^{tg(x)} \cdot \frac{1}{\cos^2(x)} \cdot \sqrt[3]{\cos^2(x)} + e^{tg(x)} \cdot \frac{2}{3} \cdot (\cos(x))^{-\frac{1}{3}} \cdot (-\operatorname{sen}(x))}{e^{tg(x)} \cdot \sqrt[3]{\cos^2(x)}}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{\sqrt[3]{\cos^2(x)}}{\cos^2(x)} - \frac{2 \operatorname{sen}(x)}{3 \sqrt[3]{\cos(x)}}}{\sqrt[3]{\cos^2(x)}} \rightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{\cos^4(x)}} - \frac{2 \operatorname{sen}(x)}{3 \sqrt[3]{\cos(x)}}}{\sqrt[3]{\cos^2(x)}}$$

$$f'(x) = \frac{1 - \frac{2}{3} \operatorname{sen}(x) \sqrt[3]{\cos^3(x)}}{\cos^2(x)} \rightarrow f'(x) = \sec^2(x) - \frac{2 \operatorname{sen}(x)}{3 \cos(x)}$$

$$f'(x) = \sec^2(x) - \frac{2}{3} \cdot tg(x)$$

La segunda forma es, antes de derivar, romper el logaritmo del producto en la suma de logaritmos.

$$f(x) = \ln(e^{\operatorname{tg}(x)} \cdot \sqrt[3]{\cos^2(x)}) \rightarrow f(x) = \operatorname{tg}(x) + \ln(\sqrt[3]{\cos^2(x)}) \rightarrow f(x) = \operatorname{tg}(x) + \frac{2}{3} \ln(\cos(x))$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} - \frac{2}{3} \cdot \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} \rightarrow f'(x) = \sec^2(x) - \frac{2}{3} \cdot \operatorname{tg}(x)$$

En ambos casos, llegamos al mismo resultado.

c)  $f(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$

El dominio de la función son todos los reales, ya que el denominador nunca se anula para los reales.

$$f'(x) = \frac{-(1+2x)}{(1+x+x^2)^2}, \quad f'(x) = 0 \rightarrow x = \frac{-1}{2}$$

$$\left(-\infty, \frac{-1}{2}\right) \rightarrow f'(-10) > 0 \rightarrow f(x) \text{ creciente}$$

$$\left(\frac{-1}{2}, +\infty\right) \rightarrow f'(0) < 0 \rightarrow f(x) \text{ decreciente}$$

## Hoja 2. Problema 2

2. a) Determina el punto  $(x, y)$  de la función  $f(x) = x^3 - x$  donde la recta tangente a la función en ese punto tenga pendiente igual a 74 .

b) Calcula  $a$  y  $b$  para que la función  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$  pase por el punto  $(-1, 6)$  y su recta tangente en  $x = 1$  forme un ángulo de  $45^\circ$  con el eje OX.

a) La derivada de la función en un punto coincide con la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto. Por lo tanto:

$$f(x) = x^3 - x \rightarrow f'(x) = 3x^2 - 1, \quad f'(x) = 74 \rightarrow 3x^2 - 1 = 74 \rightarrow x^2 = 25 \rightarrow x = \pm 5$$

Los puntos solución son:

$$(-5, -120) \text{ y } (5, 120)$$

b) Si la función pasa por el punto  $(-1, 6)$  se cumple la relación:

$$f(-1) = 6 \rightarrow -1 + a - b + 2 = 6 \rightarrow a - b = 5$$

Por otro lado, la derivada en  $x = 1$  es igual a 1 ( $\operatorname{tg}(45^\circ) = 1$ ). Es decir.

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b, \quad f'(1) = 1 \rightarrow 3 + 2a + b = 1 \rightarrow 2a + b = -2$$

Llegamos al siguiente sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas.

$$\begin{cases} a - b = 5 \\ 2a + b = -2 \end{cases} \rightarrow \text{Sumamos} \rightarrow 3a = 3 \rightarrow a = 1 \rightarrow b = -4$$

## Hoja 2. Problema 3

3. Estudia y representa gráficamente la función  $f(x) = \frac{1}{\ln(x)}$

La función está definida para los reales positivos menos el 1, donde se anula el denominador. Con esto los argumentos del logaritmo nunca son negativos o nulos.

$$\text{Dom}(f) = (0, +\infty) - \{1\}$$

La función no es simétrica ni periódica.

Estudiamos las posibles asíntotas verticales en  $x=0$  y  $x=1$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\ln(x)} = \#$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln(x)} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

En  $x=0$  encontramos una discontinuidad no evitable de segunda especie, pero no hay asíntota vertical.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\ln(x)} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\ln(x)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

En  $x=1$  hay asíntota vertical.

Estudiamos la asíntota horizontal.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(x)} = \frac{1}{\infty} = 0 \rightarrow \text{Asíntota horizontal en } y=0$$

Al haber horizontal no hay asíntota oblicua.

Calculamos la función derivada para estudiar la monotonía y los extremos relativos.

$$f'(x) = \frac{-1}{x \ln^2(x)}, \quad f'(x) = 0 \rightarrow -1 = 0 \rightarrow \text{Absurdo matemático} \rightarrow \text{No hay extremos relativos.}$$

Estudiamos el crecimiento y decrecimiento en los siguientes intervalos.

$$(0,1) \rightarrow f'\left(\frac{1}{2}\right) < 0 \rightarrow f(x) \text{ decreciente}$$

$$(1,+\infty) \rightarrow f'(10) < 0 \rightarrow f(x) \text{ decreciente}$$

La función es estrictamente decreciente en todo su dominio de definición.

Para la curvatura realizamos la segunda derivada.

$$f''(x) = \frac{\ln^2(x) + x \cdot 2 \cdot \ln(x) \cdot \frac{1}{x}}{x^2 \ln^4(x)} = \frac{\ln(x) + 2}{x^2 \ln^3(x)}, \quad f''(x) = 0 \rightarrow \ln(x) = -2 \rightarrow x = e^{-2}$$

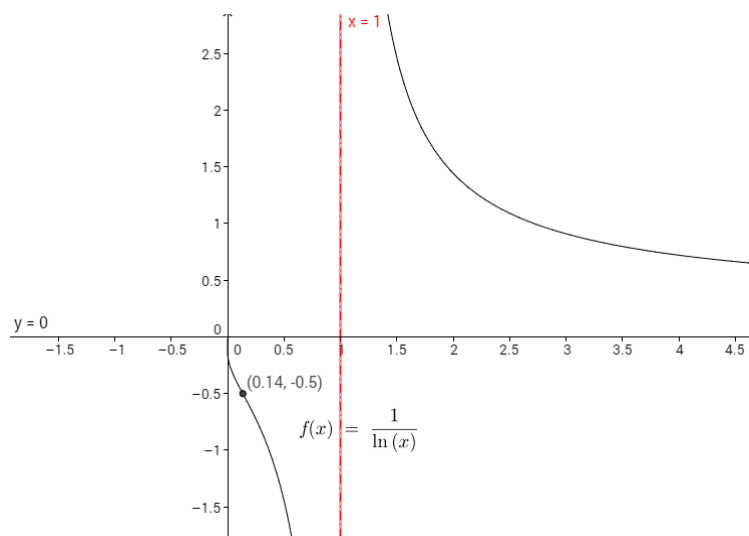
Poseemos un candidato a punto de inflexión en  $(\frac{1}{e^2}, f(\frac{1}{e^2})) = (0,14, -0,5)$

$(0, 0,14) \rightarrow f''(0,1) > 0 \rightarrow f(x)$  cóncava hacia arriba U

$(0,14, 1) \rightarrow f''(0,5) < 0 \rightarrow f(x)$  cóncava hacia abajo  $\cap$

$(0,14, +\infty) \rightarrow f''(10) > 0 \rightarrow f(x)$  cóncava hacia arriba U

En  $(0,14, -0,5)$  existe un punto de inflexión.



## Hoja 2. Problema 4

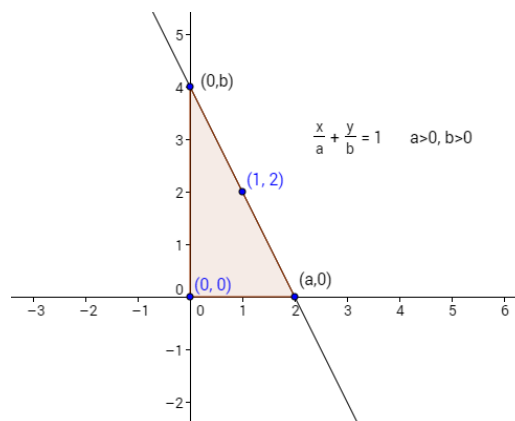
4. Encontrar, de entre todas las rectas que pasan por el punto  $(1,2)$ , aquella que forma con las partes positivas de los ejes de coordenadas un triángulo de área mínima. Obtener dicha área mínima.

Podemos resolver este problema a partir de dos formas de expresar la ecuación de la recta.

Un primer procedimiento sería trabajar con la ecuación canónica de la recta, que relaciona entre sí a los puntos de corte de la recta con los ejes de coordenadas.

$$r: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \rightarrow (a, 0), (0, b) \in r$$

Con  $a > 0, b > 0$  para nuestro problema, ya que la recta pasa por el punto  $(1,2)$  y corta a los semiejes positivos de coordenadas formando un triángulo. Por lo que la pendiente de la recta será negativa (ver imagen).



El área del triángulo rectángulo formado por la recta y los ejes cartesianos se expresa:

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$$

Y esta es la función que debemos optimizar para buscar su máximo relativo.

La función depende de dos variables. ¿Cómo podemos relacionar ambas variables, para dejar  $A$  en función de una sola variable?

Con ayuda de la ecuación de la recta, que pasa por el punto  $(1,2)$ .

$$r: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, (1,2) \in r \rightarrow \frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 1 \rightarrow \frac{1}{a} = 1 - \frac{2}{b} \rightarrow \frac{1}{a} = \frac{b-2}{b} \rightarrow a = \frac{b}{b-2}$$

Llevamos esta relación a la ecuación del área del triángulo.

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \rightarrow A = \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{b-2} \cdot b \rightarrow A = \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2}{b-2}$$

El dominio de la función es  $Dom(A) = \mathbb{R} - \{2\}$ . Y según las condiciones de nuestro enunciado, solo tienen sentido valores positivos de  $b$ , ya que la recta solo corta al eje  $OY$  en su semieje positivo.

Derivamos e igualamos a cero la función.

$$A' = \frac{1}{2} \cdot \frac{2b(b-2) - b^2}{(b-2)^2} \rightarrow A' = \frac{1}{2} \cdot \frac{2b^2 - 4b - b^2}{(b-2)^2} \rightarrow A' = \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2 - 4b}{(b-2)^2}$$

$$A' = 0 \rightarrow b^2 - 4b = 0 \rightarrow b = 0, b = 4$$

Tenemos dos puntos candidatos a extremos relativos. Vamos a evaluar la derivada en los siguientes intervalos, para decidir si son máximos o mínimos.

$$(-\infty, 0) \rightarrow A'(-10) > 0$$

$$(0, 2) \rightarrow A'(1) < 0$$

$$(2, 4) \rightarrow A'(3) < 0$$

$$(4, +\infty) \rightarrow A'(5) > 0$$

En  $b=0$  la función presenta un máximo relativo (aunque este valor no lo contemplamos realmente, según las condiciones de nuestro enunciado), y en  $b=4$  aparece un mínimo relativo (que también es absoluto si nos cernimos a valores positivos de  $b$ , que son lo que tienen sentido en nuestro problema).

Por lo tanto, si  $b=4 \rightarrow a=2 \rightarrow A=4 u^2$

La ecuación de la recta resulta:

$$r: \frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1 \rightarrow r: y = -2x + 4$$

Otra forma de resolver el problema es partiendo de una ecuación de la recta donde aparezca explícitamente su pendiente. Por ejemplo, la ecuación explícita.

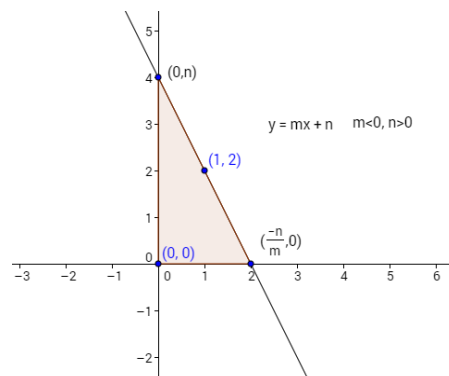
$$r: y = mx + n$$

Los puntos de corte de esta recta con los ejes cartesianos son:

$$x=0 \rightarrow y=n \rightarrow (0, n)$$

$$y=0 \rightarrow x = \frac{-n}{m} \rightarrow \left(\frac{-n}{m}, 0\right)$$

Con  $m < 0, n > 0$  según las condiciones del problema, ya que la recta es de pendiente negativa (ver imagen).



Según esto, el área del triángulo podemos expresarla:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{n^2}{|m|}$$

Donde hemos tomado valor absoluto en la variable  $m < 0$  para garantizar un área positiva. Podemos quitar el valor absoluto para  $m < 0$  de la siguiente forma:

$$A = \frac{-1}{2} \cdot \frac{n^2}{m}$$

Llegamos a una función que depende de dos variables. Podemos relacionarlas con la ecuación explícita de la recta.

$$r: y = mx + n, (1, 2) \in r \rightarrow 2 = m + n \rightarrow m = 2 - n$$

Llevando este resultado a la expresión del área:

$$A = \frac{-1}{2} \cdot \frac{n^2}{2 - n} \rightarrow A = \frac{1}{2} \cdot \frac{n^2}{n - 2}$$

Esta es la expresión a optimizar, que coincide formalmente con la que trabajamos en el primer método de la ecuación canónica  $A = \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2}{b - 2}$ . Por lo que los resultados serán análogos, ahora para las variables  $m$  y  $n$  de la ecuación explícita:

$$n = 4 \rightarrow m = -2 \rightarrow A = 4 \text{ u}^2$$

Donde  $n = 4$  es un mínimo relativo de la función  $A = \frac{1}{2} \cdot \frac{n^2}{n - 2}$ .

Y llegamos a la ecuación de la recta solución, que coincide con la obtenida en el primer método.

$$r: y = -2x + 4$$