Tema 8

Actividades de positivo Capítulo 7 - Punto frontera y discontinuidades

Actividades de positivo

En primer lugar, visualiza el vídeo:

https://youtu.be/kLTYSionk6o

En segundo lugar, intenta los siguientes ejercicios. Las soluciones las tienes más adelante. Lo ideal sería que solo mirases las soluciones una vez que lo hayas intentado por ti mismo.

Cuando lo tengas correctamente realizado en tu cuaderno, envía fotos al email del profesor **antes del domingo 5 de abril a las 23.59 horas, para obtener dos positivos del trimestre**.

¡Ánimo!

1. Escribe las tres condiciones que deben cumplirse para que una función sea continua en un punto frontera.
2. Estudia la continuidad de la función en $x=3$

$$f(x)=\begin{Bmatrix} -2x+8 & si & x\leq 3 \\ 3x-7 & si & x>3 \end{Bmatrix}$$

3. Estudia la continuidad de la función en $x=2$

$$f(x)=\begin{Bmatrix} \dfrac{x^2-4}{x-2} & si & x\neq 2 \\ 3 & si & x=2 \end{Bmatrix}$$

4. Indica el valor de k para que la función sea continua en $x=\frac{1}{2}$

$$f(x)=\begin{Bmatrix} \dfrac{3x}{2x-2} & si & x\neq \dfrac{1}{2} \\ k & si & x=\dfrac{1}{2} \end{Bmatrix}$$

Soluciones

1. Primera condición: debe existir la función en el punto frontera.

$\exists f(x_0)$

Segunda condición: límites laterales finitos e iguales.

$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L \in \mathbb{R}$

Tercera condición: la función evaluada en el punto debe coincidir con el valor del límite.

$f(x_0) = L$

2. Estudia la continuidad de la función en $x=3$

$f(x) = \begin{cases} -2x+8 & si \quad x \leq 3 \\ 3x-7 & si \quad x>3 \end{cases}$

Primera condición: la función debe existir en el punto frontera.

$\exists f(3) = -2 \cdot 3 + 8 = 2$

Segunda condición: límites laterales finitos e iguales.

$L^- = \lim_{x \to 3^-} (-2x+8) = evaluar = -2(3)+8 = 2$

$L^+ = \lim_{x \to 3^+} (3x-7) = evaluar = 3(3)-7 = 2$

$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^+} f(x) = 2 = L$

Tercera condición: la función evaluada en el punto coincide con el límite.

$f(3) = L = 2$

La función es continua en $x=3$

3. Estudia la continuidad de la función en $x=2$

$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & si \quad x \neq 2 \\ 3 & si \quad x=2 \end{cases}$

Ojo con la forma en que está expresa esta función a trozos. Tanto a la izquierda como a la derecha de 2, la ecuación de la función es el cociente de polinomios. Y solo cuando la variable x vale 2, la ecuación de la función es la recta horizontal $f(x)=2$.

Primera condición: existe la función en el punto frontera.

$\exists f(2)=3$

Segunda condición: límites laterales iguales.

Dada la forma en que está definida la función a trozos, la expresión del límite por la izquierda va a coincidir con la expresión del límite por la derecha, ya que ambos límites se aplican sobre la ecuación $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$.

Empecemos por el límite lateral izquierdo.

$L^-=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{0}{0}$ → Indeterminación → Factorizar y simplificar.

Recuerda que ya hemos estudiado las técnicas para resolver indeterminaciones (ver capítulos anteriores).

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}(x+2)=volver\ a\ evaluar=4 \ \rightarrow\ L^-=4$$

Si hacemos el límite lateral derecho, llegaremos al mismo resultado → $L^+=4$

En consecuencia:

$$\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^+}f(x)=4=L$$

Si comparamos el valor de la función en el punto frontera con el valor del límite, comprobamos que no coinciden.

$f(2)=3\neq 4=L$

Estamos ante una discontinuidad evitable en $x=2$.

3. Indica el valor de k para que la función sea continua en $x=\frac{1}{2}$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3x}{2x-2} & si\ \ x\neq\frac{1}{2}\\ k & si\ \ x=\frac{1}{2}\end{cases}$$

Primera condición: existe la función en el punto frontera.

$\exists f(\frac{1}{2})=k$

Segunda condición: límites laterales iguales.

$$\lim_{x\to (\frac{1}{2})^-}\frac{3x}{2x-2}=evaluar=\frac{-3}{2} \ \rightarrow\ L^-=\frac{-3}{2}$$

Por la forma de la función a trozos, la expresión del límite lateral derecho coincide con la expresión del límite lateral izquierdo.

$$\lim_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^+} \frac{3x}{2x-2} = evaluar = \frac{-3}{2} \quad \rightarrow \quad L^+ = \frac{-3}{2}$$

$$L^- = L^+ = L = \frac{-3}{2}$$

Según la tercera condición, el valor de la función en el punto debe coincidir con el valor del límite.

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = k \quad , \quad L = \frac{-3}{2} \quad \rightarrow \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = L \quad \rightarrow \quad k = \frac{-3}{2}$$