Teoría – Tema 8

Ejemplos y más ejemplos de límites

Índice de contenido

Practicar y practicar...2

Practicar y practicar

Como existen infinitas funciones distintas... existen infinitos límites distintos. Y cada uno “de su padre y de su madre”.

Hemos estudiado algunos casos generales...no todos. Incluso en los casos generales que hemos estudiado, las cosas se pueden complicar si las funciones con las que trabajamos son difíciles.

Así que la única alternativa que nos queda para dominar los límites es hacer y hacer ejercicios. ¡A ellos vamos!

Ejemplo 1

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x+1} = \frac{0}{2} = 0$$

Ejemplo 2

$$\lim_{x \to -1} \frac{x-1}{x+1} = \frac{-2}{0} = \infty \quad \rightarrow \text{Calculamos límites laterales}$$

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{x-1}{x+1} = \frac{-2}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{x-1}{x+1} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

Ejemplo 3

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3+2x^2-3x}{x^3+4x^2+x-6} = \frac{27+18-9}{27+36+3-6} = \frac{36}{60} = \frac{3}{5}$$

Ejemplo 4

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3+2x^2-3x}{x^3+4x^2+x-6} = \frac{1+2-3}{1+4+1-6} = \frac{0}{0} \quad \rightarrow \text{Indeterminación}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3+2x^2-3x}{x^3+4x^2+x-6} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^2+3x)}{(x-1)(x^2+5x+6)} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2+3x}{x^2+5x+6} = \frac{1+3}{1+5+6} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Ejemplo 5

$$\lim_{x \to -3} \frac{x^3+2x^2-3x}{x^3+4x^2+x-6} = \frac{-27+18+9}{-27+36-3-6} = \frac{0}{0} \quad \rightarrow \text{Indeterminación}$$

$$\lim_{x \to -3} \frac{x^3+2x^2-3x}{x^3+4x^2+x-6} = \lim_{x \to -3} \frac{(x+3)(x^2-x)}{(x+3)(x^2+x-2)} = \lim_{x \to -3} \frac{x^2-x}{x^2+x-2} = \frac{9+3}{9-3-2} = \frac{12}{5}$$

Ejemplo 6

$$\lim_{x \to -2} \frac{3x^2+5x-2}{x^2-4} = \frac{12-10-2}{4-4} = \frac{0}{0} \quad \rightarrow \text{Indeterminación}$$

$$\lim_{x \to -2} \frac{3x^2+5x-2}{x^2-4} = \lim_{x \to -2} \frac{(x+2)(3x-1)}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x \to -2} \frac{3x-1}{x-2} = \frac{3(-2)-1}{-2-2} = \frac{7}{4}$$

Ejemplo 7

$$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+6}-3}{3-x} = \frac{\sqrt{9}-3}{3-3} = \frac{0}{0} \quad \rightarrow \text{Indeterminación}$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+6}-3}{3-x} = \lim_{x \to 3} \frac{(\sqrt{x+6}-3)(\sqrt{x+6}+3)}{(3-x)(\sqrt{x+6}+3)} = \lim_{x \to 3} \frac{x+6-9}{(3-x)(\sqrt{x+6}+3)} \quad \rightarrow \text{Operar numerador}$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{x-3}{(3-x)(\sqrt{x+6}+3)} = \lim_{x \to 3} \frac{-1}{\sqrt{x+6}+3} = \frac{-1}{\sqrt{9}+3} = \frac{-1}{6}$$

Ejemplo 8

$$\lim_{x \to 4} \frac{2x-8}{\sqrt{x^2+9}-5} = \frac{2\cdot 4-8}{\sqrt{25}-5} = \frac{0}{0} \quad \rightarrow \text{Indeterminación}$$

$$\lim_{x \to 4} \frac{2x-8}{\sqrt{x^2+9}-5} = \lim_{x \to 4} \frac{(2x-8)(\sqrt{x^2+9}+5)}{(\sqrt{x^2+9}-5)(\sqrt{x^2+9}+5)} \quad \rightarrow \text{Operar denominador}$$

$$\lim_{x \to 4} \frac{(2x-8)(\sqrt{x^2+9}+5)}{(\sqrt{x^2+9}-5)(\sqrt{x^2+9}+5)} = \lim_{x \to 4} \frac{(2x-8)(\sqrt{x^2+9}+5)}{x^2+9-25}$$

$$\lim_{x \to 4} \frac{(2x-8)(\sqrt{x^2+9}+5)}{x^2-16} = \lim_{x \to 4} \frac{(2x-8)(\sqrt{x^2+9}+5)}{(x+4)(x-4)} \quad \rightarrow \text{Operar numerador}$$

$$\lim_{x \to 4} \frac{(2x-8)(\sqrt{x^2+9}+5)}{(x+4)(x-4)} = \lim_{x \to 4} \frac{2(x-4)(\sqrt{x^2+9}+5)}{(x+4)(x-4)} = \lim_{x \to 4} \frac{2(\sqrt{x^2+9}+5)}{(x+4)} = \frac{2(\sqrt{25}+5)}{4+4} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$$

Ejemplo 9

$$\lim_{x \to -2} \frac{3-\sqrt{2x^2+1}}{3x-6} = \frac{3-\sqrt{2\cdot(-2)^2+1}}{3(-2)-6} = \frac{3-\sqrt{9}}{-6-6} = \frac{0}{-12} = 0$$

Ejemplo 10

$$\lim_{x \to 2} \frac{3-\sqrt{2x^2+1}}{3x-6} = \frac{3-\sqrt{2\cdot(2)^2+1}}{3\cdot 2-6} = \frac{3-\sqrt{9}}{6-6} = \frac{0}{0}$$ → Indeterminación

$$\lim_{x \to 2} \frac{3-\sqrt{2x^2+1}}{3x-6} = \lim_{x \to 2} \frac{(3-\sqrt{2x^2+1})(3+\sqrt{2x^2+1})}{(3x-6)(3+\sqrt{2x^2+1})}$$ → Operar numerador

$$\lim_{x \to 2} \frac{9-(2x^2+1)}{(3x-6)(3+\sqrt{2x^2+1})} = \lim_{x \to 2} \frac{-2x^2+8}{(3x-6)(3+\sqrt{2x^2+1})} = \lim_{x \to 2} \frac{-2(x^2-4)}{(3x-6)(3+\sqrt{2x^2+1})}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{-2(x+2)(x-2)}{(3\mathrm{x}-6)(3+\sqrt{2x^2+1})}$$ → Operar denominador

$$\lim_{x \to 2} \frac{-2(x+2)(x-2)}{3(x-2)(3+\sqrt{2x^2+1})} = \lim_{x \to 2} \frac{-2(x+2)}{3(3+\sqrt{2x^2+1})} = \frac{-2(2+2)}{3(3+\sqrt{2(2)^2+1})} = \frac{-8}{18} = \frac{-4}{9}$$

Ejemplo 11

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{4x^2+4x-3}{4x^2-1} = \frac{\frac{4}{4}+\frac{4}{2}-3}{\frac{4}{4}-1} = \frac{0}{0}$$ → Indeterminación

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{4x^2+4x-3}{4x^2-1} = \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{(x-\frac{1}{2})(4x+6)}{4(x^2-\frac{1}{4})} = \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{(x-\frac{1}{2})(4x+6)}{4(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})} = \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{4x+6}{4(x+\frac{1}{2})} = \frac{\frac{4}{2}+6}{4(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})} = 2$$

Ejemplo 12

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{5x^2-3x+2}{2x^2+x-1} = \frac{\infty}{\infty}$$ → Indeterminación → Cociente de polinomios del mismo grado

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{5x^2-3x+2}{2x^2+x-1} = \frac{5}{2}$$

Ejemplo 13

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x+6}{3x^2-x+5} = \frac{-\infty}{+\infty}$$ → Indeterminación → Grado denominador > Grado numerador

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x+6}{3x^2-x+5} = 0$$

Ejemplo 14

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{9x^4-5x^2+6}}{3x^2+2x-4} = \frac{\infty}{\infty}$$ → Indeterminación → Cociente de polinomios del mismo grado

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{9x^4-5x^2+6}}{3x^2+2x-4} = \frac{\sqrt{9}}{3} = 1$$

Ejemplo 15

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-3x^3+6x-7}{x^2-5x+3} = \frac{-\infty}{+\infty}$$ → Indeterminación → Grado numerador > Grado denominador

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-3x^3+6x-7}{x^2-5x+3} = -\infty$$

Ejemplo 16

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{5x^2-x+2}{\sqrt[3]{x^6+3x^3-2x}} = \frac{\infty}{\infty}$$ → Indeterminación → Cociente de polinomios del mismo grado

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{5x^2-x+2}{\sqrt[3]{x^6+3x^3-2x}} = \frac{5}{1} = 5$$

Ejemplo 17

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{13x^2-x}{\sqrt{169x^4-x^2+8}} = \frac{\infty}{\infty}$$ → Indeterminación → Cociente de polinomios del mismo grado

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{13x^2-x}{\sqrt{169x^4-x^2+8}} = \frac{13}{\sqrt{169}} = 1$$

Ejemplo 18

$$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{25x^2-7}-5x)=\infty-\infty$$ → Indeterminación

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{25x^2-7}-5x)(\sqrt{25x^2-7}+5x)}{\sqrt{25x^2-7}+5x}=\lim_{x \to +\infty} \frac{25x^2-7-25x^2}{\sqrt{25x^2-7}+5x}=\lim_{x \to +\infty} \frac{-7}{\sqrt{25x^2-7}+5x}=\frac{-7}{\infty}=0$$

Ejemplo 19

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x+1}{2}-\frac{x+4}{5}\right)=\infty-\infty$$ → Indeterminación

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x+1}{2}-\frac{x+4}{5}\right)=\lim_{x \to +\infty} \frac{5x+5-2x-8}{10}=\lim_{x \to +\infty} \frac{3x-3}{10}=+\infty$$

Ejemplo 20

$$\lim_{x \to +\infty} (8x-\sqrt{16x^2+x-3})=\infty-\infty$$ → Indeterminación

$$\lim_{x \to +\infty} (8x-\sqrt{16x^2+x-3})=\lim_{x \to +\infty} \frac{(8x-\sqrt{16x^2+x-3})(8x+\sqrt{16x^2+x-3})}{8x+\sqrt{16x^2+x-3}}=\lim_{x \to +\infty} \frac{64x^2-16x^2-x+3}{8x+\sqrt{16x^2+x-3}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{48x^2-x+3}{8x+\sqrt{16x^2+x-3}}=\frac{\infty}{\infty}$$ → Grado numerador > Grado denominador

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{48x^2-x+3}{8x+\sqrt{16x^2+x-3}}=\infty$$

Ejemplo 21. Encuentra el valor de a que verifica

$$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{4x^2+ax}-2x)=\frac{1}{3}$$ → Debemos calcular el límite e igualar a $\frac{1}{3}$ para obtener a

$$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{4x^2+ax}-2x)=\infty-\infty$$ → Indeterminación

$$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{4x^2+ax}-2x)=\lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{4x^2+ax}-2x)(\sqrt{4x^2+ax}+2x)}{\sqrt{4x^2+ax}+2x}=\lim_{x \to +\infty} \frac{4x^2+ax-4x^2}{\sqrt{4x^2+ax}+2x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{ax}{\sqrt{4x^2+ax}+2x}=\frac{\infty}{\infty}$$ → Indeterminación → Cociente de polinomios del mismo grado

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{ax}{\sqrt{4x^2+ax}+2x}=\frac{a}{\sqrt{4}+2}=\frac{a}{4}$$ → Igualamos el valor del límite a $\frac{1}{3}$

$$\frac{a}{4}=\frac{1}{3} \quad \to \quad a=\frac{4}{3}$$

Ejemplo 22

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-1}{x}=\frac{0}{0}$$ → Indeterminación

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1-x}-1)(\sqrt{1-x}+1)}{x(\sqrt{1-x}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-x-1}{x(\sqrt{1-x}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{x(\sqrt{1-x}+1)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-1}{\sqrt{1-x}+1}=\frac{-1}{2}$$

Ejemplo 23

$$\lim_{x\to 0}\frac{(2+x)^3-8}{x}=\frac{0}{0}$$ → Indeterminación

$$\lim_{x\to 0}\frac{(2+x)^3-8}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(4+x^2+4x)(2+x)-8}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3+6x^2+12x+8-8}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3+6x^2+12x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3+6x^2+12x}{x}=\lim_{x\to 0}x^2+6x+12=12$$

Ejemplo 24. Estudia la continuidad de la función en $x=3$

$$f(x)=\begin{cases}-2x+8 & si \quad x\leq 3\\ 3x-7 & si \quad x>3\end{cases}$$

$$\exists f(3)=-2\cdot 3+8=2$$

$$\lim_{x\to 3^-}-2x+8=2$$

$$\lim_{x\to 3^+}3x-7=2$$

$$\lim_{x\to 3^-}f(x)=\lim_{x\to 3^+}f(x)=2=L$$

$$f(3)=L=2$$

La función es continua en $x=3$

Ejemplo 25. Estudia la continuidad de la función en $x=-1$

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4 & si \quad x\leq -1 \\ -x+2 & si \quad x>-1 \end{cases}$$

$\exists f(-1)=(-1)^2-4=-3$

$\lim_{x \to -1^-} x^2-4=-3$

$\lim_{x \to -1^+} -x+2=3$

$\lim_{x \to -1^-} f(x)=-3\neq 3=\lim_{x \to -1^+} f(x)$

Discontinuidad no evitable de primera especie de salto finito en $x=-1$

Ejemplo 26. Estudia la continuidad de la función en $x=2$

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & si \quad x\neq 2 \\ 3 & si \quad x=2 \end{cases}$$

$\exists f(2)=3$

$\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2-4}{x-2}=\frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \to 2^-} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2}=\lim_{x \to 2^-} (x+2)=4 \rightarrow \lim_{x \to 2^+} \frac{x^2-4}{x-2}=4$

$\lim_{x \to 2^-} f(x)=\lim_{x \to 2^+} f(x)=4=L$

$f(2)=3\neq 4=L$

Discontinuidad evitable en $x=2$

Ejemplo 27. Estudia la continuidad de la función en $x=-2$ ***y en*** $x=3$

$$f(x)=\begin{cases} 2 & si \quad x<-2 \\ -x^2+6 & si \quad -2\leq x\leq 3 \\ 1 & si \quad x>3 \end{cases}$$

$\exists f(-2)=-(-2)^2+6=-4+6=2$

$\lim_{x \to -2^-} 2=2$

$\lim_{x \to -2^+} (-x^2+6)=2$

$\lim_{x \to -2^-} f(x)=\lim_{x \to -2^+} f(x)=2=L$

$f(-2)=2=L$

Función continua en $x=-2$

$\exists f(3)=-(3)^2+6=-9+6=-3$

$\lim_{x \to 3^-} (-x^2+6)=-3$

$\lim_{x \to 3^+} 1=1$

$\lim_{x \to 3^-} f(x)=-3 \neq 1= \lim_{x \to 3^+} f(x)$

Discontinuidad no evitable de primera especie de salto finito en $x=3$

Ejemplo 28

$\lim_{x \to \sqrt{2}} \frac{3}{x^2-2}=\frac{3}{0}=\infty$ → Estudiamos los límites laterales

$\lim_{x \to \sqrt{2}^-} \frac{3}{x^2-2}=\frac{3}{0^-}=-\infty$

$\lim_{x \to \sqrt{2}^+} \frac{3}{x^2-2}=\frac{3}{0^+}=+\infty$

Ejemplo 29. Indica el valor de k para que la función sea continua en $x=\frac{1}{2}$

$$f(x)=\left\{\begin{matrix} \frac{3x}{2x-2} \quad si \quad x\neq\frac{1}{2} \\ k \quad si \quad x=\frac{1}{2} \end{matrix}\right\}$$

$\exists f(\frac{1}{2})=k$

$\lim_{x \to (\frac{1}{2})^-} \frac{3x}{2x-2}=\frac{-3}{2} \quad \rightarrow \quad \lim_{x \to (\frac{1}{2})^+} \frac{3x}{2x-2}=\frac{-3}{2}$

$\lim_{x \to (\frac{1}{2})^-} f(x)= \lim_{x \to (\frac{1}{2})^+} f(x)=\frac{-3}{2}=L$

Por continuidad → $f(\frac{1}{2})=k=L \quad \rightarrow \quad k=\frac{-3}{2}$

Ejemplo 30. El número de habitantes de cierta población, en los próximos años, vendrá dado por la función $f(x)=\frac{14500x+7200}{2x+1}$, donde la variable x mide los años transcurridos desde un tiempo inicial $x=0$.

a) ¿Cuántos habitantes tiene la población actualmente?

$f(0)=7200 \quad \textit{habitantes}$

b)¿Y dentro de dos años?

$$f(2)=\frac{14500\cdot 2+7200}{2\cdot 2+1}=\frac{36200}{5}=7240 \quad \textit{habitantes}$$

c)¿La población crecería de manera indefinida o tendería a estabilizarse en torno a un determinado número de habitantes?

Nos preguntan por el comportamiento de la función en un tiempo infinito. Es decir:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{14500x+7200}{2x+1}=\frac{\infty}{\infty}$$ → Cociente de polinomios del mismo grado

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{14500x+7200}{2x+1}=\frac{14500}{2}=7250 \quad \textit{habitantes}$$

La población muestra una asíntota horizontal en el valor $f(x)=7250 \quad \textit{habitantes}$.