Teoría – Tema 8

Discontinuidades

Índice de contenido

Concepto de discontinuidad

Una función es discontinua en un punto $x=x_0$ cuando no es continua. ¡¡Jajaja, nos hemos partido la cabeza con esta definición!!

Ahora en serio. Si no se cumplen algunas de las tres condiciones impuestas para la continuidad de la función en un punto $x=x_0$, hablaremos de discontinuidad.

Recordemos las tres condiciones de continuidad en un punto $x=x_0$.

1. Está definida la función en el punto → $\exists f(x_0)$
2. Existen los dos límites laterales y son iguales → $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$
3. El valor de la función en el punto es igual al valor del límite en el punto → $f(x_0) = L$

Discontinuidad evitable

Sea la función $f(x)$ y el punto $x=x_0$.

Si los límites laterales existen y son iguales, pero no coincide con el valor de la función en el punto ($f(x_0)\neq L$), o bien no está definida la función en el punto ($\nexists f(x_0)$) hablaremos de **discontinuidad evitable**.

Es evitable... porque podemos evitarlo.

¿Cómo? Redefiniendo el valor de la función en $x=x_0$ y dándole el valor del límite, es decir, forzar que se cumpla la igualdad $f(x_0)=L$.

Ejemplo

Estudiar la continuidad de la función $f(x)=\begin{Bmatrix} x+1 & si & x<1 \\ 0 & x=1 & \\ 2 & x>1 & \end{Bmatrix}$ en $x_0=1$.

Tenemos una función definida a trozos.

1. $\exists f(1)=0$

2. $\lim_{x\to 1^-}(x+1)=2$, $\lim_{x\to 1^+}(2)=2$ $\rightarrow$ $\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=L=2$

3. $f(1)=0\neq L=2$

Por lo tanto el valor de la función en $x_0=1$ no coincide con el valor del límite. Esta discontinuidad evitable podemos evitarla redefiniendo la función a trozos de la siguiente forma:

$$f(x)=\begin{Bmatrix} x+1 & si & x<1 \\ 2 & x\geq 1 & \end{Bmatrix}$$

Discontinuidad no evitable de primera especie

Sea la función $f(x)$ y el punto $x = x_0$.

Si los límites laterales existen pero no son iguales, hablaremos de **discontinuidad no evitable de primera especie**.

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

Si ambos límites laterales son finitos, diremos que la **discontinuidad de primera especie es de salto finito**.

Si al menos uno de los límites laterales es infinito, diremos que la **discontinuidad de primera especie es de salto infinito**.

Importante: No confundir el concepto de "límite infinito" con el concepto de "no existir el límite. Por ejemplo, la función $f(x) = \ln(x)$ tiene límite por la derecha en $x = 0$ porque:

$\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$ → El límite por la derecha en $x = 0$ es $-\infty$

Pero no tiene límite por la izquierda en $x = 0$ porque el logaritmo no está definido para valores negativos:

$\nexists \lim_{x \to 0^-} \ln(x)$ → No existe el límite por la izquierda en $x = 0$

Ejemplo

Estudiar la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} -1 & si \quad x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$ en $x_0 = 0$.

Tenemos una función definida a trozos.

1. $\exists f(0) = 0$
2. $\lim_{x \to 0^-} (-1) = -1$, $\lim_{x \to 0^+} (1) = 1$ → $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1 \neq \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$

Los límites laterales existen, son finitos, pero no coinciden. La discontinuidad es no evitable de primera especie de salto finito.

El valor absoluto $\left| \lim_{x \to 0^+} f(x) - \lim_{x \to 0^-} f(x) \right| = 2$ nos da la magnitud del salto finito.

Ejemplo

Estudiar la continuidad de la función $f(x)=\frac{1}{x}$ en $x_0=0$.

1. $\nexists f(0)$ → No podemos dividir por 0

2. $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x}=\frac{1}{0^-}=-\infty$ → Si dividimos por un número negativo muy próximo a 0 , el cociente se hace tremendamente negativo y tiende a $-\infty$.

$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x}=\frac{1}{0^+}=+\infty$ → Si dividimos por un número positivo muy próximo a 0 , el cociente se hace tremendamente positivo y tiende a $+\infty$.

Al menos uno de los límites laterales se dispara a infinito (en este caso los dos). Estamos ante una discontinuidad no evitable de primera especie de salto infinito.

Discontinuidad no evitable de segunda especie

Sea la función $f(x)$ y el punto $x=x_0$.

Si al menos uno de los límites laterales no existe, hablaremos de **discontinuidad no evitable de segunda especie**.

$$\nexists \lim_{x \to x_0^-} f(x) \quad y/ó \quad \nexists \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

Ejemplo

Estudiar la continuidad de la función $f(x)=\ln(x)$ en $x_0=0$.

1. $\nexists f(0)$ $\rightarrow$ El logaritmo no está definido para valores nulos.

2. $\nexists \lim_{x \to 0^-} \ln(x)$ $\rightarrow$ El logaritmo no está definido para valores negativos. No existe el límite lateral izquierdo.

$\lim_{x \to 0^+} \ln(x)=\ln(0^+)=-\infty$ $\rightarrow$ Sí existe el límite lateral derecho y es $-\infty$.

Al menos uno de los límites laterales no existe. Estamos ante una discontinuidad no evitable de segunda especie.