Teoría – Tema 8

Concepto intuitivo de límite

Índice de contenido

Aproximación al concepto de límites laterales

La Real Academia de la Lengua Española define “límite”, en una de sus acepciones, como el valor al que se aproximan cada vez más los términos de una secuencia infinita de valores.

Una primera idea importante de esta definición aplicada a las matemáticas: **un límite es un valor, es decir, un número**. No es un concepto abstracto ni un misterio sin resolver.

Una segunda idea importante: **a ese valor se llega como el final de una secuencia infinita de términos**. Sí, has leído bien: secuencia infinita. Y como no tenemos una eternidad para completar esa secuencia infinita, en matemática se definen operaciones para estimar el valor final de esa secuencia infinita.

Pues eso es lo que vamos a estudiar con el concepto de límite matemático: **secuencias infinitas de valores que pueden convergen a un valor final llamado límite**.

Sea una función $f(x)=x^2$. Si evaluamos la función en $x_0=1$ todo el mundo entiende que la función vale $f(1)=1$.

Supongamos que tomamos valores que se acercan a $x_0=1$ por la izquierda ($x<1$), y calculamos sus respectivas imágenes en la función.

- $x=0{,}5 \quad \rightarrow \quad f(0{,}5)=0{,}25$
- $x=0{,}8 \quad \rightarrow \quad f(0{,}8)=0{,}64$
- $x=0{,}9 \quad \rightarrow \quad f(0{,}9)=0{,}81$
- $x=0{,}99 \quad \rightarrow \quad f(0{,}99)=0{,}9801$
- $x=0{,}999 \quad \rightarrow \quad f(0{,}999)=0{,}998001$

Intuimos que conforme x se acerca cada vez más al valor $x_0=1$, el valor de la función se acerca cada vez más al valor $f(1)=1$. Y si pienso un número próximo a $x_0=1$ cuya imagen se acerca mucho al valor $f(1)=1$, siempre puedo pensar en otro valor aún más próximo a $x_0=1$ (sin alcanzarlo) cuya imagen se acerque aún más al valor $f(1)=1$ (sin alcanzarlo).

Aquí tenemos nuestro primer ejemplo de límite: una secuencia infinita de valores $x<1$ cuyas imágenes en la función $f(x)=x^2$ se acercan cada vez más al valor $f(1)=1$.

Y como estamos tomando valores a la izquierda de $x_0=1$ hablaremos de **límite lateral por la izquierda** de la función $f(x)=x^2$ en el punto $x_0=1$. Y se denota así:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x)=1$$

Ahora tomamos valores que se acercan a $x_0=1$ por la derecha ($x>1$), y calculamos sus respectivas imágenes en la función.

- $x=1{,}5 \rightarrow f(1{,}5)=2{,}25$
- $x=1{,}2 \rightarrow f(1{,}2)=1{,}44$
- $x=1{,}01 \rightarrow f(1{,}01)=1{,}0201$
- $x=1{,}001 \rightarrow f(1{,}001)=1{,}002001$
- $x=1{,}0001 \rightarrow f(0{,}999)=1{,}00020001$

Ahora la secuencia infinita acontece para valores a la derecha de $x_0=1$ ($x>1$). La secuencia de valores de las imágenes $f(x)$ se aproxima cada vez más y más al valor $f(1)=1$.

Y como estamos tomando valores a la derecha de $x_0=1$ hablaremos de **límite lateral por la derecha** de la función $f(x)=x^2$ en el punto $x_0=1$. Y se denota así:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x)=1$$

Concepto de límite

Una función $f(x)$ tiene límite L en el punto x_0 si existen sus límites laterales y son iguales.

$$\lim_{x \to x_0} f(x)=L \iff \lim_{x \to x_0^-} f(x)=\lim_{x \to x_0^+} f(x)=L$$

Esta no es una definición formal rigurosa de límite. Eso lo veremos el año que viene en 2ºBachillerato. Pero nos sirve para entender el concepto de continuidad de funciones a partir de la idea de límite.