Problemas – Tema 8

Solución a problemas de continuidad y límite - Hoja 5 - Problemas 1, 5

Hoja 5. Problema 1

1. Calcula las asíntotas de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\frac{2x-1}{x^2-9}$

b) $f(x)=\frac{3x^3+2x^2+3}{x^2+3x+2}$

c) $f(x)=\frac{2x+5}{3x}$

a) Las asíntotas verticales aprecen en los valores que anulan al denominador.

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{2x-1}{x^2-9}=\frac{5}{0^-}=-\infty \quad , \quad \lim_{x\to 3^+}\frac{2x-1}{x^2-9}=\frac{5}{0^+}=+\infty \quad \to \quad x=3$$

$$\lim_{x\to -3^-}\frac{2x-1}{x^2-9}=\frac{5}{0^+}=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to -3^+}\frac{2x-1}{x^2-9}=\frac{5}{0^-}=-\infty \quad \to \quad x=-3$$

La asíntota horizontal se obtiene estudiando el comportamiento de la función en el infinito.

$\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{x^2-9}=\frac{\infty}{\infty}$ → Indeterminación

Grado numerador < Grado denominador → $\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{x^2-9}=0 \quad \to \quad y=0$

Al existir asíntota horizontal, no tendremos oblicua.

b) Las asíntotas verticales aprecen en los valores que anulan al denominador.

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{3x^3+2x^2+3}{x^2+3x+2} = \frac{2}{0^-} = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to -1^+} \frac{3x^3+2x^2+3}{x^2+3x+2} = \frac{2}{0^+} = +\infty \quad \rightarrow \quad x=-1$$

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{3x^3+2x^2+3}{x^2+3x+2} = \frac{-13}{0^+} = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to -2^+} \frac{3x^3+2x^2+3}{x^2+3x+2} = \frac{-13}{0^-} = +\infty \quad \rightarrow \quad x=-2$$

La asíntota horizontal se obtiene estudiando el comportamiento de la función en el infinito.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3+2x^2+3}{x^2+3x+2} = \frac{\infty}{\infty}$$ → Indeterminación

Grado numerador > Grado denominador → $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3+2x^2+3}{x^2+3x+2} = \infty$

Al no existir asíntota horizontal, estudiamos la oblicua $y=mx+n$.

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^3+2x^2+3}{x^3+3x^2+2x} = \frac{\infty}{\infty}$$ → Indeterminación

Grado numerador = Grado denominador → $m = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^3+2x^2+3}{x^3+3x^2+2x} = \frac{3}{1} = 3$

$$n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x^3+2x^2+3}{x^2+3x+2} - 3x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{-7x^2-6x+3}{x^2+3x+2} = \frac{-7}{1} = -7$$

Asíntota oblicua → $y=3x-7$

c) Las asíntotas verticales aprecen en los valores que anulan al denominador.

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{2x-1}{x^2-9} = \frac{5}{0^-} = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{2x+5}{3x} = \frac{5}{0^+} = +\infty \quad \rightarrow \quad x=0$$

La asíntota horizontal se obtiene estudiando el comportamiento de la función en el infinito.

$\lim_{x\to\infty} \frac{2x+5}{3x} = \frac{\infty}{\infty}$ → Indeterminación

Grado numerador = Grado denominador → $\lim_{x\to\infty} \frac{2x+5}{3x} = \frac{2}{3} \quad \rightarrow \quad y=\frac{2}{3}$

Al existir asíntota horizontal, no tendremos oblicua.

Hoja 5. Problema 5

5. Calcula el valor de k **para que la función** $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2} & si \quad x\neq 1 \; y \; x\neq 2 \\ -\sqrt{2k+1} & si \quad x=1 \end{cases}$ **sea continua en** $x=1$ **.**

Aplicamos las tres condiciones de continuidad de una función en un punto.

$$\exists f(1)=-\sqrt{2k+1}$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\frac{0}{0} \rightarrow \text{Indeterminación} \rightarrow \lim_{x\to 1^-} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to 1^-} \frac{(x+1)}{(x-2)}=-2$$

$$\lim_{x\to 1^+} (-\sqrt{2k+1})=-\sqrt{2k+1}$$

Igualamos los límites laterales → $L=-2=-\sqrt{2k+1} \rightarrow 4=2k+1 \rightarrow k=\frac{3}{2}$

Y con este valor también se cumple → $f(1)=L=-2$