

Problemas – Tema 8

Solución a problemas de continuidad y límite - Hoja 5 - Problemas 1, 5

Hoja 5. Problema 1

1. Calcula las asíntotas de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-9}$

b) $f(x) = \frac{3x^3+2x^2+3}{x^2+3x+2}$

c) $f(x) = \frac{2x+5}{3x}$

a) Las asíntotas verticales aparecen en los valores que anulan al denominador.

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x-1}{x^2-9} = \frac{5}{0^-} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x-1}{x^2-9} = \frac{5}{0^+} = +\infty \rightarrow x=3$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{2x-1}{x^2-9} = \frac{5}{0^+} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{2x-1}{x^2-9} = \frac{5}{0^-} = -\infty \rightarrow x=-3$$

La asíntota horizontal se obtiene estudiando el comportamiento de la función en el infinito.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-1}{x^2-9} = \frac{\infty}{\infty} \rightarrow \text{Indeterminación}$$

Grado numerador < Grado denominador $\rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-1}{x^2-9} = 0 \rightarrow y=0$

Al existir asíntota horizontal, no tendremos oblicua.

b) Las asíntotas verticales aparecen en los valores que anulan al denominador.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3x^3 + 2x^2 + 3}{x^2 + 3x + 2} = \frac{2}{0^-} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3x^3 + 2x^2 + 3}{x^2 + 3x + 2} = \frac{2}{0^+} = +\infty \rightarrow x = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{3x^3 + 2x^2 + 3}{x^2 + 3x + 2} = \frac{-13}{0^+} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{3x^3 + 2x^2 + 3}{x^2 + 3x + 2} = \frac{-13}{0^-} = +\infty \rightarrow x = -2$$

La asíntota horizontal se obtiene estudiando el comportamiento de la función en el infinito.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 2x^2 + 3}{x^2 + 3x + 2} = \frac{\infty}{\infty} \rightarrow \text{Indeterminación}$$

Grado numerador > Grado denominador $\rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 2x^2 + 3}{x^2 + 3x + 2} = \infty$

Al no existir asíntota horizontal, estudiamos la oblicua $y = mx + n$.

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 2x^2 + 3}{x^3 + 3x^2 + 2x} = \frac{\infty}{\infty} \rightarrow \text{Indeterminación}$$

Grado numerador = Grado denominador $\rightarrow m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 2x^2 + 3}{x^3 + 3x^2 + 2x} = \frac{3}{1} = 3$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^3 + 2x^2 + 3}{x^2 + 3x + 2} - 3x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-7x^2 - 6x + 3}{x^2 + 3x + 2} = \frac{-7}{1} = -7$$

Asíntota oblicua $\rightarrow y = 3x - 7$

c) Las asíntotas verticales aparecen en los valores que anulan al denominador.

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x-1}{x^2-9} = \frac{5}{0^-} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x+5}{3x} = \frac{5}{0^+} = +\infty \rightarrow x=0$$

La asíntota horizontal se obtiene estudiando el comportamiento de la función en el infinito.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+5}{3x} = \frac{\infty}{\infty} \rightarrow \text{Indeterminación}$$

$$\text{Grado numerador} = \text{Grado denominador} \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+5}{3x} = \frac{2}{3} \rightarrow y = \frac{2}{3}$$

Al existir asíntota horizontal, no tendremos oblicua.

Hoja 5. Problema 5

5. Calcula el valor de k para que la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x^2-3x+2} & \text{si } x \neq 1 \text{ y } x \neq 2 \\ -\sqrt{2k+1} & \text{si } x = 1 \end{cases}$ sea continua en $x=1$.

Aplicamos las tres condiciones de continuidad de una función en un punto.

$$\exists f(1) = -\sqrt{2k+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2-1}{x^2-3x+2} = \frac{0}{0} \rightarrow \text{Indeterminación} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x+1)}{(x-2)} = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (-\sqrt{2k+1}) = -\sqrt{2k+1}$$

$$\text{Igualamos los límites laterales} \rightarrow L = -2 = -\sqrt{2k+1} \rightarrow 4 = 2k+1 \rightarrow k = \frac{3}{2}$$

$$\text{Y con este valor también se cumple} \rightarrow f(1) = L = -2$$