

Problemas – Tema 8

Solución a problemas de continuidad y límite - Hoja 4 - Problemas 1, 5

Hoja 4. Problema 1

1. Rompe a trozos la función $f(x) = |x^2 + 1| + |x - 1|$

Obtenemos las raíces de los polinomios de cada argumento de los valores absolutos.

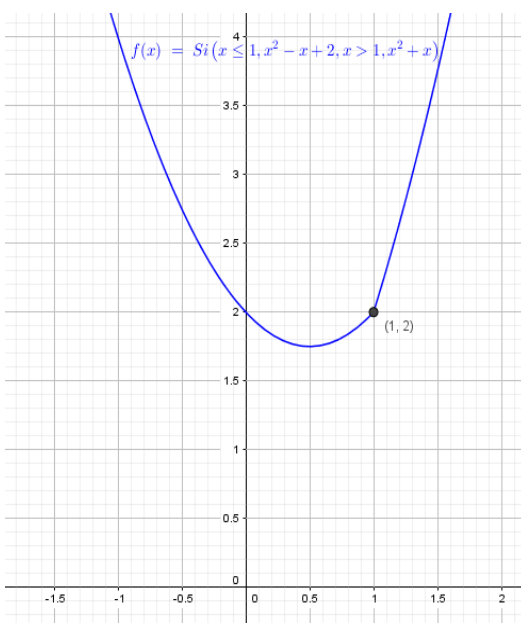
$$x^2 + 1 = 0 \rightarrow \text{No solución} \in \mathbb{R} \rightarrow x^2 + 1 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$$

Por lo tanto, podemos quitar las barras de valor absoluto de $|x^2 + 1|$ para cualquier valor real.

$x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow$ Estudiamos el signo de $x - 1$ en los siguientes intervalos:

$$(-\infty, 1) \rightarrow x - 1 < 0 \rightarrow |x - 1| = -(x - 1)$$

$$(1, \infty) \rightarrow x - 1 > 0 \rightarrow |x - 1| = x - 1$$



Por lo que la función a trozos queda:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 - (x - 1) & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 + 1 + x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 2 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 + x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Hoja 4. Problema 5

5. Calcula los siguientes límites en el infinito.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x + 3}{2 - x^2 - 2x^3}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-2}}{x+6}$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x + 3}{2 - x^2 - 2x^3} = \frac{\infty}{\infty} \rightarrow$ Indeterminación \rightarrow Cociente de polinomios de igual grado

El límite coincide con el cociente de los coeficientes que acompañan a la máxima potencia (x^3).

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x + 3}{2 - x^2 - 2x^3} = \frac{1}{-2}$$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-2}}{x+6} = \frac{\infty}{\infty} \rightarrow$ Indeterminación

El numerador lo podemos ver, en el infinito, como un polinomio de grado $\frac{1}{2}$. Y el denominador como un polinomio de grado 1. Como el grado del denominador es mayor que el del numerador, el cociente tiende a 0 cuando la variable tiende a infinito.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-2}}{x+6} = 0$$