Problemas – Tema 8

Solución a problemas de continuidad y límite - Hoja 3 - Problemas 3, 4

Hoja 3. Problema 3

1. Calcula el dominio de las siguientes funciones.

a) $f(x)=1+\sqrt{\frac{3-x}{5-x}}$

b) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{(x-1)(2x+3)}}$

c) $f(x)=\begin{cases} \frac{2x}{x-1} & si \quad x\leq 0 \\ \sqrt{2x+1} & si \quad x>0 \end{cases}$

a) $f(x)=1+\sqrt{\frac{3-x}{5-x}}$

El argumento de la raíz debe ser mayor o igual a cero. Además, el denominador de la fracción no puede anularse.

$\frac{3-x}{5-x}\geq 0$ $\rightarrow$ Raíz del numerador $x=3$; Raíz del denominador $x=5$

Evaluamos la inecuación en los siguientes intervalos.

$(-\infty,3) \rightarrow x=0 \rightarrow \frac{3}{5}>0$ $\rightarrow$ Intervalo perteneciente al dominio

$(3,5) \rightarrow x=4 \rightarrow \frac{3-4}{5-4}<0$ $\rightarrow$ Intervalo no perteneciente al dominio

$(5,\infty) \rightarrow x=10 \rightarrow \frac{3-10}{5-10}>0$ $\rightarrow$ Intervalo perteneciente al dominio

La solución será la unión de los intervalos permitidos, además de las raíces del numerador. Es decir:

$Dom(f)$ = (- ∞ , 3] U (5 , ∞)

b) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{(x-1)(2x+3)}}$

Nuevamente imponemos la condición de que el argumento de la raíz no pueda anularse. Y tampoco puede ser cero, ya que la raíz está dividiendo en la fracción.

$(x+1)(2x+3)>0$ → Raíces $x=-1$, $x=\frac{-3}{2}$

Evaluamos el argumento en los siguientes intervalos.

$(-\infty,-\frac{3}{2})$ → $x=-10$ → $(-10+1)(2(-10)+3)>0$ → intervalo perteneciente al dominio

$(\frac{-3}{2},-1)$ → $x=\frac{-5}{4}$ → $(\frac{-5}{4}+1)(2(\frac{-5}{4})+3)<0$ → intervalo no perteneciente al dominio

$(-1,\infty)$ → $x=0$ → $(0+1)(2(0)+3)>0$ → intervalo perteneciente al dominio

Solución final → $Dom(f)=(-\infty,-\frac{3}{2})\cup(-1,\infty)$

c) $f(x)=\left\{\begin{matrix}\frac{2x}{x-1} & si & x\leq 0 \\ \sqrt{2x+1} & si & x>0\end{matrix}\right\}$

Debemos estudiar el dominio de la función en cada tramo, además de la continuidad en el punto frontera.

Para $x<0$ → $f(x)=\frac{2x}{x-1}$ es una función continua salvo en $x=1$. Pero ese valor no pertenece al intervalo $x<0$ → La función es continua para todo valor $x<0$.

Para $x>0$ → $f(x)=\sqrt{2x+1}$ es una función con discriminante positivo, ya que para $x>0$ el argumento $2x+1$ siempre es positivo → La función es continua para todo valor $x>0$.

Debemos estudiar la continuidad en el punto frontera $x=0$, aplicando las tres condiciones de continuidad de una función en un punto.

$\exists f(0)=\frac{0}{0-1}=0$

$\lim_{x\to 0^+}\frac{2x}{x-1}=0$, $\lim_{x\to 0^+}\sqrt{2x+1}=1$ → Los límites laterales no coinciden

La función no continua en $x=0$ → $Dom(f)=\mathbb{R}-\{0\}$

Hoja 3. Problema 4

4. Realiza la composición $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$ de la siguiente pareja de funciones.

a) $f(x)=\frac{1}{x}$ **,** $g(x)=\frac{1}{x-2}$

b) $f(x)=x^2-x-2$ **,** $g(x)=\sqrt{2x-4}$

c) $f(x)=\frac{x+3}{x-3}$ **,** $g(x)=\frac{x^2-1}{x}$

a) $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=\frac{1}{x-2}$

$$(f \circ g)(x)=f\left(\frac{1}{x-2}\right)=\frac{1}{\frac{1}{x-2}}=x-2 \quad , \quad (g \circ f)(x)=g\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{\frac{1}{x}-2}=\frac{x}{1-2x}$$

b) $f(x)=x^2-x-2$, $g(x)=\sqrt{2x-4}$

$$(f \circ g)(x)=f(\sqrt{2x-4})=(\sqrt{2x-4})^2-\sqrt{2x-4}-2=2x-4-\sqrt{2x-4}-2=2x-\sqrt{2x-4}-6$$

$$(g \circ f)(x)=g(x^2-x-2)=\sqrt{2(x^2-x-2)-4}=\sqrt{2x^2-2x-8}$$

c) $f(x)=\frac{x+3}{x-3}$, $g(x)=\frac{x^2-1}{x}$

$$(f \circ g)(x)=f\left(\frac{x^2-1}{x}\right)=\frac{\frac{x^2-1}{x}+3}{\frac{x^2-1}{x}-3}=\frac{x^2+3x-1}{x^2-3x-1}$$

$$(g \circ f)(x)=g\left(\frac{x+3}{x-3}\right)=\frac{\left(\frac{x+3}{x-3}\right)^2-1}{\frac{x+3}{x-3}}=\frac{\frac{(x+3)^2-(x-3)^2}{(x-3)^2}}{\frac{x+3}{x-3}}=\frac{12x}{(x-3)(x+3)}=\frac{12x}{x^2-9}$$