

## Problemas – Tema 8

### Solución a problemas de continuidad y límite - Hoja 3 - Problemas 3, 4

#### ■ Hoja 3. Problema 3

1. Calcula el dominio de las siguientes funciones.

a)  $f(x) = 1 + \sqrt{\frac{3-x}{5-x}}$

b)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x-1)(2x+3)}}$

c)  $f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{x-1} & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{2x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a)  $f(x) = 1 + \sqrt{\frac{3-x}{5-x}}$

El argumento de la raíz debe ser mayor o igual a cero. Además, el denominador de la fracción no puede anularse.

$$\frac{3-x}{5-x} \geq 0 \rightarrow \text{Raíz del numerador } x=3 \text{ ; Raíz del denominador } x=5$$

Evaluamos la inecuación en los siguientes intervalos.

$$(-\infty, 3) \rightarrow x=0 \rightarrow \frac{3}{5} > 0 \rightarrow \text{Intervalo perteneciente al dominio}$$

$$(3, 5) \rightarrow x=4 \rightarrow \frac{3-4}{5-4} < 0 \rightarrow \text{Intervalo no perteneciente al dominio}$$

$$(5, \infty) \rightarrow x=10 \rightarrow \frac{3-10}{5-10} > 0 \rightarrow \text{Intervalo perteneciente al dominio}$$

La solución será la unión de los intervalos permitidos, además de las raíces del numerador. Es decir:

$$\text{Dom}(f) = (-\infty, 3] \cup (5, \infty)$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x-1)(2x+3)}}$$

Nuevamente imponemos la condición de que el argumento de la raíz no pueda anularse. Y tampoco puede ser cero, ya que la raíz está dividiendo en la fracción.

$$(x+1)(2x+3) > 0 \rightarrow \text{Raíces } x = -1, \quad x = -\frac{3}{2}$$

Evaluamos el argumento en los siguientes intervalos.

$$(-\infty, -\frac{3}{2}) \rightarrow x = -10 \rightarrow (-10+1)(2(-10)+3) > 0 \rightarrow \text{intervalo perteneciente al dominio}$$

$$(-\frac{3}{2}, -1) \rightarrow x = -\frac{5}{4} \rightarrow (-\frac{5}{4}+1)(2(-\frac{5}{4})+3) < 0 \rightarrow \text{intervalo no perteneciente al dominio}$$

$$(-1, \infty) \rightarrow x = 0 \rightarrow (0+1)(2(0)+3) > 0 \rightarrow \text{intervalo perteneciente al dominio}$$

$$\text{Solución final} \rightarrow \text{Dom}(f) = (-\infty, -\frac{3}{2}) \cup (-1, \infty)$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{x-1} & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{2x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Debemos estudiar el dominio de la función en cada tramo, además de la continuidad en el punto frontera.

Para  $x < 0 \rightarrow f(x) = \frac{2x}{x-1}$  es una función continua salvo en  $x = 1$ . Pero ese valor no pertenece al intervalo  $x < 0 \rightarrow$  La función es continua para todo valor  $x < 0$ .

Para  $x > 0 \rightarrow f(x) = \sqrt{2x+1}$  es una función con discriminante positivo, ya que para  $x > 0$  el argumento  $2x+1$  siempre es positivo  $\rightarrow$  La función es continua para todo valor  $x > 0$ .

Debemos estudiar la continuidad en el punto frontera  $x=0$  , aplicando las tres condiciones de continuidad de una función en un punto.

$$\exists f(0) = \frac{0}{0-1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{x-1} = 0 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{2x+1} = 1 \quad \rightarrow \text{Los límites laterales no coinciden}$$

La función no continua en  $x=0 \rightarrow \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

## Hoja 3. Problema 4

4. Realiza la composición  $(f \circ g)(x)$  y  $(g \circ f)(x)$  de la siguiente pareja de funciones.

a)  $f(x) = \frac{1}{x}$  ,  $g(x) = \frac{1}{x-2}$

b)  $f(x) = x^2 - x - 2$  ,  $g(x) = \sqrt{2x-4}$

c)  $f(x) = \frac{x+3}{x-3}$  ,  $g(x) = \frac{x^2-1}{x}$

a)  $f(x) = \frac{1}{x}$  ,  $g(x) = \frac{1}{x-2}$

$$(f \circ g)(x) = f\left(\frac{1}{x-2}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x-2}} = x-2 \quad , \quad (g \circ f)(x) = g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x}-2} = \frac{x}{1-2x}$$

b)  $f(x) = x^2 - x - 2$  ,  $g(x) = \sqrt{2x-4}$

$$(f \circ g)(x) = f(\sqrt{2x-4}) = (\sqrt{2x-4})^2 - \sqrt{2x-4} - 2 = 2x-4 - \sqrt{2x-4} - 2 = 2x - \sqrt{2x-4} - 6$$

$$(g \circ f)(x) = g(x^2 - x - 2) = \sqrt{2(x^2 - x - 2) - 4} = \sqrt{2x^2 - 2x - 8}$$

c)  $f(x) = \frac{x+3}{x-3}$  ,  $g(x) = \frac{x^2-1}{x}$

$$(f \circ g)(x) = f\left(\frac{x^2-1}{x}\right) = \frac{\frac{x^2-1}{x} + 3}{\frac{x^2-1}{x} - 3} = \frac{x^2-1+3x}{x^2-3x-1}$$

$$(g \circ f)(x) = g\left(\frac{x+3}{x-3}\right) = \frac{\left(\frac{x+3}{x-3}\right)^2 - 1}{\frac{x+3}{x-3}} = \frac{\frac{(x+3)^2 - (x-3)^2}{(x-3)^2}}{\frac{x+3}{x-3}} = \frac{12x}{(x-3)(x+3)} = \frac{12x}{x^2-9}$$