

Problemas – Tema 8

Solución a problemas de continuidad y límite - Hoja 2 - Todos resueltos

Hoja 2. Problema 1

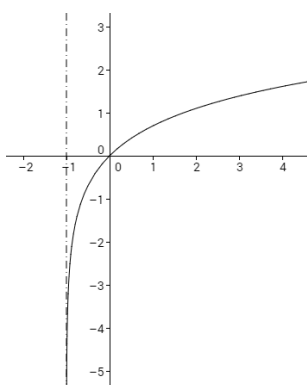
1. Relaciona de manera justificada las siguientes funciones con sus respectivas gráficas. Debes razonar con el máximo detalle posible.

- $f(x) = \ln(x+1)$

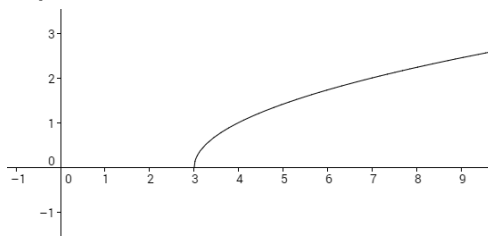
- $g(x) = \frac{x}{x-1}$

- $h(x) = \sqrt{x-3}$

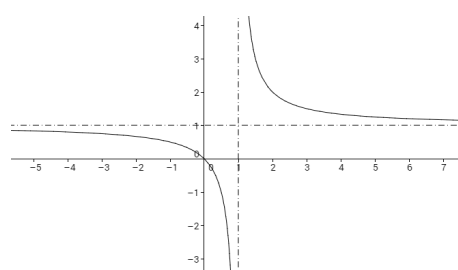
a)



b)



c)



$f(x) = \ln(x+1)$ se corresponde con la gráfica **a)** ya que la función está definida siempre que el argumento del logaritmo sea positivo, por lo que presenta una asíntota vertical para valores a la derecha de $x = -1$.

Además, la función logaritmo es una función estrictamente creciente y se dispara a infinito cuando $x \rightarrow \infty$.

Por último si $x=0 \rightarrow f(0) = \ln(0+1) = 0 \rightarrow$ La función corta a los ejes cartesianos en el origen de coordenadas $(0,0)$.

$g(x) = \frac{x}{x-1}$ se corresponde con la gráfica **c)**, ya que posee una asíntota vertical en $x=1$ (donde no está definida la función, por anularse el denominador) y una asíntota horizontal en $y=1$ que se corresponde con el límite $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$.

Además, la gráfica corta a los ejes cartesianos en el origen de coordenadas $(0,0)$, que se corresponde con el valor $g(0)=0$.

$h(x) = \sqrt{x-3}$ se corresponde con la gráfica **b)**, ya que la función no está definida para discriminantes negativos, por lo que su dominio es $x \geq 3$.

Además, la función raíz cuadrada es estrictamente creciente y se dispara a infinito cuando $x \rightarrow \infty$.

Hoja 2. Problema 2

2. Sea $f(x) = \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 4x - 5}$.

a) Estudia la continuidad en $x = -1$ y en $x = 5$.

b) Calcula $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

Estudiamos la continuidad de la función en $x = -1$.

$$\nexists f(-1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 4x - 5} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 - 7x + 10}{(x+1)(x-5)} = \frac{18}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 4x - 5} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - 7x + 10}{(x+1)(x-5)} = \frac{18}{0^-} = -\infty$$

Discontinuidad no evitable de primera especie de salto infinito en $x = -1$.

Estudiamos la continuidad de la función en $x = 5$.

$$\nexists f(5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 4x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{(x-2)(x-5)}{(x+1)(x-5)} = \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{x-2}{x+1} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 4x - 5} = \frac{1}{2}$$

Discontinuidad evitable en $x = 5$.

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$

Ya que tenemos un cociente de polinomios de grado dos, donde los coeficientes que acompañan a x^2 en el numerador y en el denominador es 1 .

Hoja 2. Problema 3

3. Calcula los siguientes límites.

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (3x - 5\sqrt{x})$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+x}{x} - \frac{2+x}{1+x} \right)$

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (3x - 5\sqrt{x}) = \infty - \infty \rightarrow$ Indeterminación

Multiplicamos y dividimos por el conjugado.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x - 5\sqrt{x})(3x + 5\sqrt{x})}{3x + 5\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^2 - 25x}{3x + 5\sqrt{x}} = \infty$$

El límite en el infinito va a infinito por tener un cociente de polinomios, con el grado del numerador mayor que el grado del denominador.

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+x}{x} - \frac{2+x}{1+x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+x}{x} \right) - \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2+x}{1+x} \right) = 1 - 1 = 0$

El límite de la diferencia es la diferencia de los límites. Y en cada término tenemos un cociente de polinomios del mismo grado en numerador y denominador.

Hoja 2. Problema 4

4. Determina a y b para que la función sea continua en $x=0$ y en $x=3$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si } x < 0 \\ ax+b & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ \frac{x^2-9}{x-3} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

La función es continua en $x=0$ si se cumplen los siguientes requisitos.

$$\exists f(0) = a \cdot 0 + b = b$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2+1) = 0+1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (ax+b) = b$$

Límites laterales iguales $\rightarrow b=1 \rightarrow$ Existe el límite y vale $L=1$

$$f(0) = 1 = L$$

La función es continua en $x=3$ si se cumplen los siguientes requisitos.

$$\exists f(3) = a \cdot 3 + b = 3a + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} (ax+b) = 3a + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(x+3)(x-3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x+3) = 6$$

Límites laterales iguales $\rightarrow 3a+1=6 \rightarrow a = \frac{5}{3}$

$$f(3) = 6 = L$$