Problemas – Tema 8

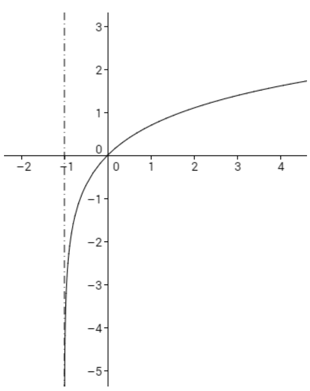
Solución a problemas de continuidad y límite - Hoja 2 - Todos resueltos

Hoja 2. Problema 1

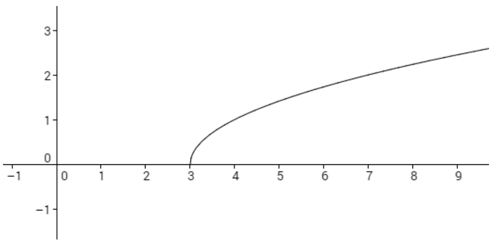
1. Relaciona de manera justificada las siguientes funciones con sus respectivas gráficas. Debes razonar con el máximo detalle posible.

- $f(x)=\ln(x+1)$
- $g(x)=\dfrac{x}{x-1}$
- $h(x)=\sqrt{x-3}$

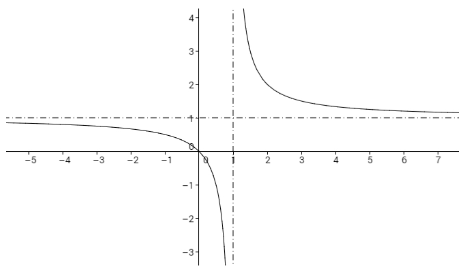
a)



b)



c)



$f(x)=\ln(x+1)$ se corresponde con la gráfica ***a)*** ya que la función está definida siempre que el argumento del logaritmo sea positivo, por lo que presenta una asíntota vertical para valores a la derecha de $x=-1$.

Además, la función logaritmo es una función estrictamente creciente y se dispara a infinito cuando $x\rightarrow\infty$.

Por último si $x=0$ $\rightarrow$ $f(0)=\ln(0+1)=0$ $\rightarrow$ La función corta a los ejes cartesianos en el origen de coordenadas $(0,0)$.

$g(x)=\frac{x}{x-1}$ se corresponde con la gráfica **c)**, ya que posee una asíntota vertical en $x=1$ (donde no está definida la función, por anularse el denominador) y una asíntota horizontal en $y=1$ que se corresponde con el límite $\lim_{x\to\infty} f(x)=1$.

Además, la gráfica corta a los ejes cartesianos en el origen de coordenadas $(0,0)$, que se corresponde con el valor $g(0)=0$.

$h(x)=\sqrt{x-3}$ se corresponde con la gráfica b), ya que la función no está definida para discriminantes negativos, por lo que su dominio es $x\geq 3$.

Además, la función raíz cuadrada es estrictamente creciente y se dispara a infinito cuando $x\to\infty$.

Hoja 2. Problema 2

2. Sea $f(x)=\frac{x^2-7x+10}{x^2-4x-5}$ **.**

a) Estudia la continuidad en $x=-1$ **y en** $x=5$ **.**

b) Calcula $\lim_{x\to\infty} f(x)$

Estudiemos la continuidad de la función en $x=-1$.

$\nexists f(-1)$

$$\lim_{x\to-1^-}\frac{x^2-7x+10}{x^2-4x-5}=\lim_{x\to-1^-}\frac{x^2-7x+10}{(x+1)(x-5)}=\frac{18}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-1^+}\frac{x^2-7x+10}{x^2-4x-5}=\lim_{x\to-1^+}\frac{x^2-7x+10}{(x+1)(x-5)}=\frac{18}{0^-}=-\infty$$

Discontinuidad no evitable de primera especie de salto infinito en $x=-1$.

Estudiemos la continuidad de la función en $x=5$.

$\nexists f(5)$

$$\lim_{x\to5^-}\frac{x^2-7x+10}{x^2-4x-5}=\lim_{x\to5^-}\frac{(x-2)(x-5)}{(x+1)(x-5)}=\lim_{x\to5^-}\frac{x-2}{x+1}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to5^+}\frac{x^2-7x+10}{x^2-4x-5}=\frac{1}{2}$$

Discontinuidad evitable en $x=5$.

b) $\lim_{x\to\infty} f(x)=1$

Ya que tenemos un cociente de polinomios de grado dos, donde los coeficientes que acompañan a x^2 en el numerador y en el denominador es 1 .

Hoja 2. Problema 3

3. Calcula los siguientes límites.

a) $\lim_{x \to \infty} (3x - 5\sqrt{x})$

b) $\lim_{x \to \infty} (\frac{1+x}{x} - \frac{2+x}{1+x})$

a) $\lim_{x \to \infty} (3x - 5\sqrt{x}) = \infty - \infty$ → Indeterminación

Multiplicamos y dividimos por el conjugado.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(3x-5\sqrt{x})(3x+5\sqrt{x})}{3x+5\sqrt{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{9x^2-25x}{3x+5\sqrt{x}} = \infty$$

El límite en el infinito va a infinito por tener un cociente de polinomios, con el grado del numerador mayor que el grado del denominador.

b) $\lim_{x \to \infty} (\frac{1+x}{x} - \frac{2+x}{1+x}) = \lim_{x \to \infty} (\frac{1+x}{x}) - \lim_{x \to \infty} (\frac{2+x}{1+x}) = 1 - 1 = 0$

El límite de la diferencia es la diferencia de los límites. Y en cada término tenemos un cociente de polinomios del mismo grado en numerador y denominador.

Hoja 2. Problema 4

4. Determina a y b para que la función sea continua en $x=0$ y en $x=3$.

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 \quad si \quad x<0 \\ a\,x+b \quad si \quad 0\leq x\leq 3 \\ \dfrac{x^2-9}{x-3} \quad si \quad x>3 \end{cases}$$

La función es continua en $x=0$ si se cumplen los siguientes requisitos.

$\exists f(0)=a\cdot 0+b=b$

$\lim_{x\to 0^-}(x^2+1)=0+1=1$

$\lim_{x\to 0^+}(a\,x+b)=b$

Límites laterales iguales → $b=1$ → Existe el límite y vale $L=1$

$f(0)=1=L$

La función es continua en $x=3$ si se cumplen los siguientes requisitos.

$\exists f(3)=a\cdot 3+b=3\,a+1$

$\lim_{x\to 3^-}(a\,x+b)=3\,a+1$

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{(x+3)(x-3)}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}(x+3)=6$$

Límites laterales iguales → $3\,a+1=6$ → $a=\dfrac{5}{3}$

$f(3)=6=L$