Teoría – Tema 7

Parábola

Índice de contenido

La parábola como superficie cónica

Si un cono de revolución con vértice V es intersectado por un plano secante que es paralelo a una generatriz g, el resultado es una parábola.

Al igual que la hipérbola, la parábola es una curva abierta.

En la siguiente imagen observamos, de manera unificada, los cuatro tipos de cónicas estudiadas en este curso. Imagen tomada de:

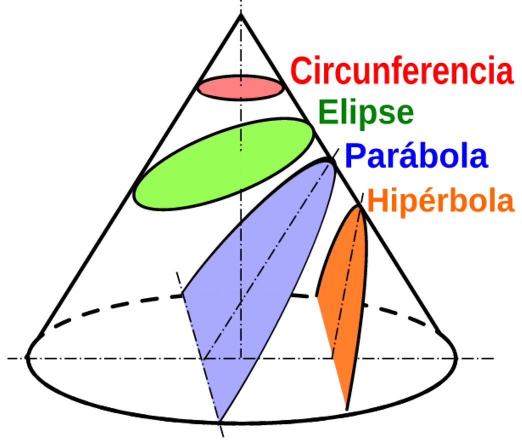
«Cono y secciones» de Drini - Trabajo propio

Disponible bajo la licencia GFDL vía Wikimedia Commons

http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Cono_y_secciones.svg#/media/File:Cono_y_secciones.svg

Distintos tipos de cónicas estudiadas

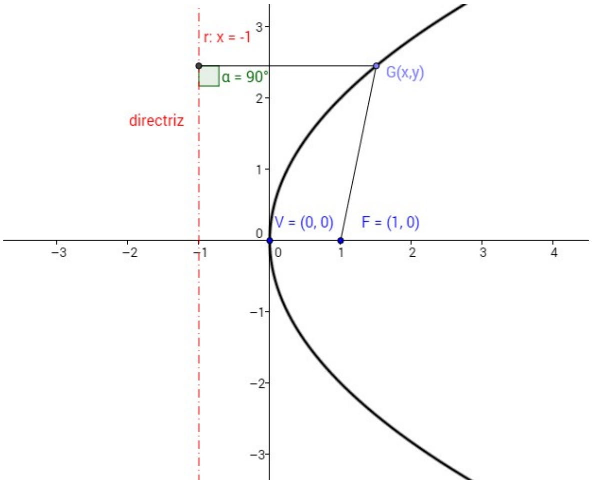
La parábola resulta del corte de un plano paralelo a una generatriz del cono



La parábola como lugar geométrico

La parábola es **el lugar geométrico de los puntos del plano** $G(x, y)$ **que equidistan de una recta llamada generatriz y de un punto llamado foco**.

$$Parábola\ de\ vértice\ V(0,0)\ y\ foco\ sobre\ el\ eje\ OX$$



El **eje** es una recta perpendicular a la directriz y que pasa por el foco F .

El **centro** (x_0, y_0) es el punto de corte del eje con la parábola. También se denomina **vértice**. Si el centro coincide con el origen de coordenadas $(x_0, y_0)=(0,0)$.

La distancia entre el foco y la directriz es el **parámetro** $p>0$. Por definición de la parábola, **el vértice equidista del foco y de la directriz**, por lo que la distancia del vértice al foco es $\frac{p}{2}>0$ y la distancia del vértice a la directriz también es $\frac{p}{2}>0$.

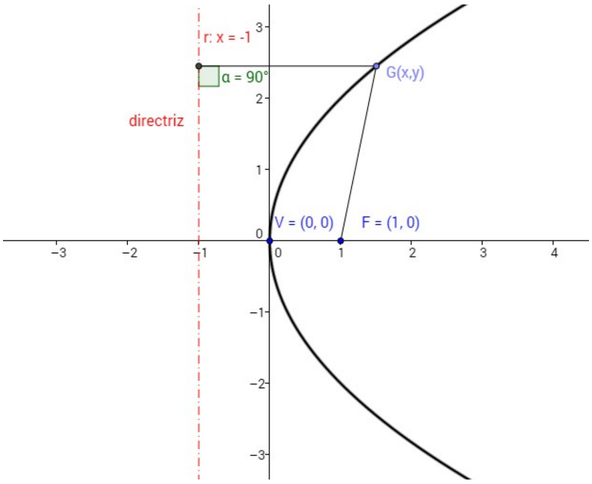
El **radio vector** es el segmento que une $G(x, y)$ con el foco F .

Ecuación de la parábola con vértice el origen de coordenadas, eje sobre el de abscisas y foco en el semieje positivo OX

Sea $G(x,y)$ un punto genérico de la parábola, con vértice en $V(0,0)$ y foco $F(\frac{p}{2},0)$.

Parábola de vértice $V(0,0)$, *foco* $F(1,0)$ *y directriz* $r: x=-1$

Ecuación de la parábola: $y^2=4x \rightarrow$ *distancia* $p=2$



La distancia del vértice a la directriz es $\frac{p}{2}$, ya que el vértice es equidistante al foco y a la directriz por pertenecer a la parábola. Por lo tanto la ecuación general de la recta directriz será $x=\frac{-p}{2} \rightarrow r: x+\frac{p}{2}=0$

La distancia del punto $G(x,y)$ al foco $F(\frac{p}{2},0)$ resulta:

$$d(G,F)=\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+y^2}$$

Y la distancia del punto $G(x,y)$ a una recta $r: x+\frac{p}{2}=0$ será (como ya hemos estudiado en clases anteriores, distancia de un punto a una recta):

$$d(G,r)=\frac{1\cdot x+\frac{p}{2}}{\sqrt{1^2+0^2}}=x+\frac{p}{2}$$

Igualamos ambas distancias $d(G,F)=d(G,r)$:

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=x+\frac{p}{2} \;\rightarrow\; \left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 \;\rightarrow\; -px+y^2=px$$

Ecuación de la parábola centrada en el origen de coordenadas $V(0,0)$, eje sobre el de abscisas y foco $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ en el semieje positivo OX.

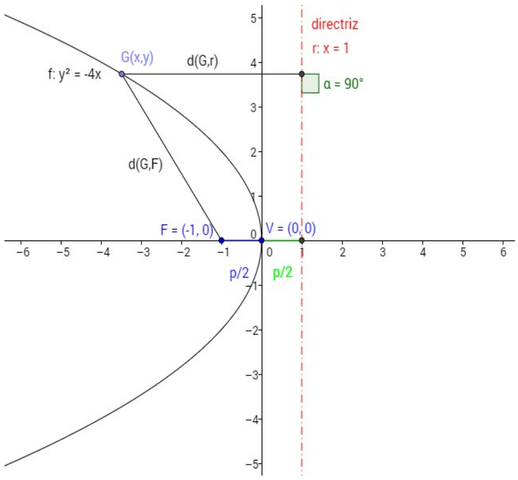
$y^2=2px$

Ecuación de la parábola con vértice el origen de coordenadas, eje sobre el de abscisas y foco en el semieje negativo OX

Sea $G(x,y)$ un punto genérico de la parábola, con vértice en $V(0,0)$ y foco $F(\frac{-p}{2},0)$.

Parábola de vértice $V(0,0)$, *foco* $F(-1,0)$ *y directriz* $r: x=1$

Ecuación de la parábola: $y^2=-4x \rightarrow$ *distancia* $p=2$



Ecuación de la parábola centrada en el origen de coordenadas $V(0,0)$, eje sobre el de abscisas y foco $F(\frac{-p}{2},0)$ en el semieje negativo OX.

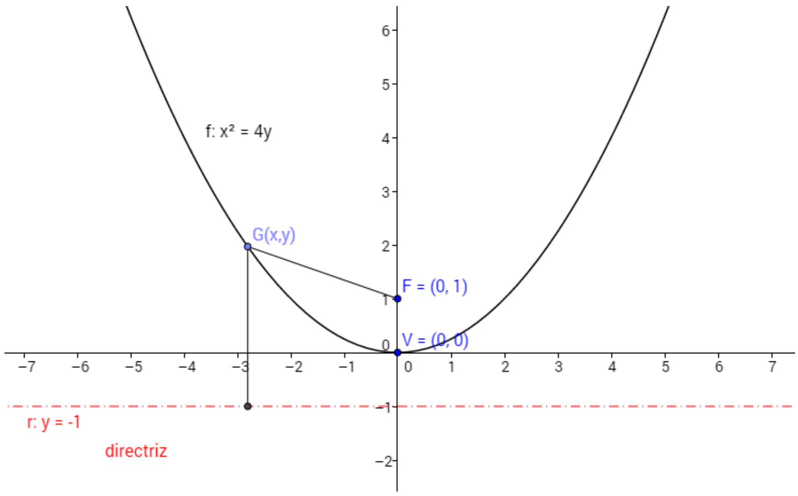
$y^2=-2px$

Ecuación de la parábola con vértice el origen de coordenadas, eje sobre el de ordenadas y foco en el semieje positivo OY

Sea $G(x, y)$ un punto genérico de la parábola, con vértice en $V(0,0)$ y foco $F(0, \frac{p}{2})$.

Parábola de vértice $V(0,0)$, *foco* $F(0,1)$ *y directriz* $r: y=-1$

Ecuación de la parábola: $x^2=4y \rightarrow$ *distancia* $p=2$



Ecuación de la parábola centrada en el origen de coordenadas $V(0,0)$, eje sobre el de ordenadas y foco $F(0, \frac{p}{2})$ en el semieje positivo OY.

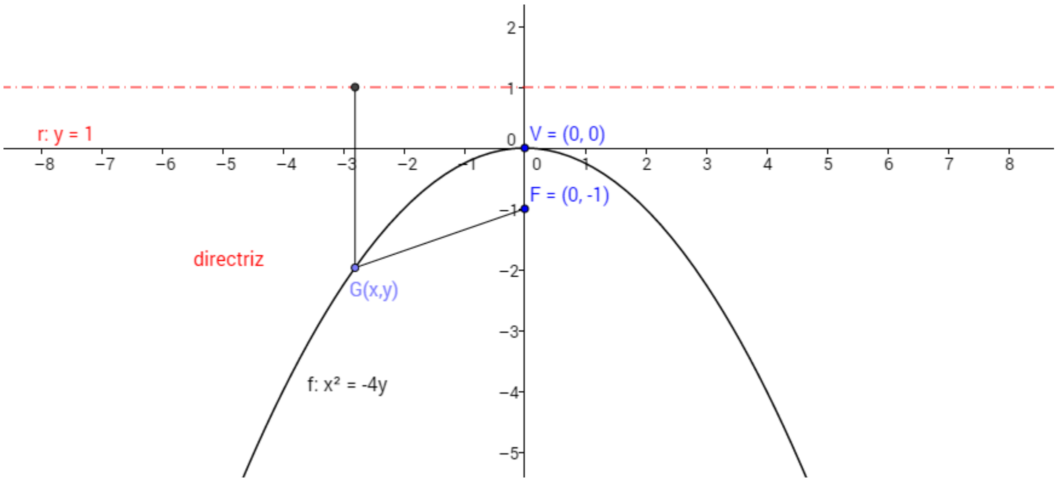
$x^2=2py$

Ecuación de la parábola con vértice el origen de coordenadas, eje sobre el de ordenadas y foco en el semieje negativo OY

Sea $G(x,y)$ un punto genérico de la parábola, con vértice en $V(0,0)$ y foco $F\left(0,\frac{-p}{2}\right)$.

Parábola de vértice $V(0,0)$, *foco* $F(0,-1)$ *y directriz* $r: y=1$

Ecuación de la parábola: $x^2=-4\text{y} \rightarrow$ *distancia* $p=2$



Ecuación de la parábola centrada en el origen de coordenadas $V(0,0)$ **, eje sobre el de ordenadas y foco** $F\left(0,\frac{-p}{2}\right)$ **en el semieje negativo OY.**

$x^2=-2\,p\,y$

Ecuación de la parábola con vértice en un punto arbitrario distinto del origen de coordenadas, y con ejes paralelos a los cartesianos

Ecuación de la parábola de vértice (x_0, y_0) , eje paralelo al de abscisas y foco a la derecha del vértice:

$$(y-y_0)^2=2p(x-x_0)$$

Ecuación de la parábola de vértice (x_0, y_0) , eje paralelo al de abscisas y foco a la izquierda del vértice:

$$(y-y_0)^2=-2p(x-x_0)$$

Ecuación de la parábola de vértice (x_0, y_0) , eje paralelo al de ordenadas y foco por encima del vértice:

$$(x-x_0)^2=2p(y-y_0)$$

Ecuación de la parábola de vértice (x_0, y_0) , eje paralelo al de ordenadas y foco por debajo del vértice:

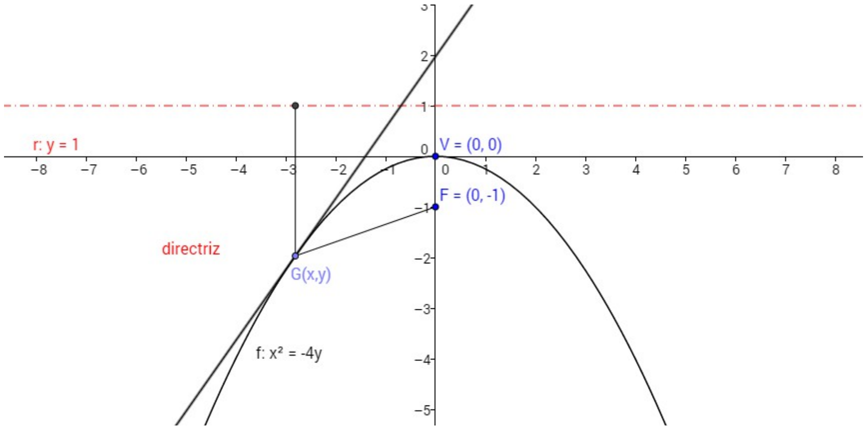
$$(x-x_0)^2=-2p(y-y_0)$$

Si la directriz de la parábola es una recta oblicua, y por tanto los ejes no son paralelos a los cartesianos, la ecuación de la parábola hay que deducirla mediante la definición.

Rectas tangentes a una parábola por un punto

Si el punto $G(x,y)$ pertenece a la parábola, la recta tangente a la parábola por ese punto es la bisectriz del ángulo que forman el radio vector que une $G(x,y)$ con el foco F y la recta perpendicular a la directriz desde el punto $G(x,y)$.

Recta tangente a la parábola por un punto que pertenece a la parábola



Si el punto $G(x,y)$ no pertenece a la prábola, se resuelve el sistema de ecuaciones formado por la ecuación de la parábola y el haz de rectas (de distintas pendientes) que pasan por el punto $G(x,y)$. Y forzamos que la solución de ese sistema sea única, haciendo cero el discriminante de la raíz cuadrada que aparece en su solución.

Pero ¡¡ojo!! Puede ocurrir que la recta solo corte a la parábola en un punto... y no sea tangente. ¿Cuándo ocurre eso? Cuando la recta es paralela al eje de la parábola (o perpendicular a la directriz,es lo mismo). En ese caso la recta es secante, no tangente.

Los puntos T y T' indican puntos de tangencia. El punto S es secante