

Problemas – Tema 7

Solución a problemas de ampliación de los Temas 5 y 6 - Hoja 3 - Problemas 4, 6, 8

Hoja 3. Problema 4

Resuelto por Fermín Roldán Palma (abril 2015)

4. Halla las ecuaciones de las dos rectas que, pasando por $P(2,3)$, forman un ángulo de 45° con la recta de ecuación $r: x+2y-5=0$.

Obtenemos la pendiente de la recta r .

$$m_r = \frac{-A}{B} \rightarrow m_r = \left(\frac{-1}{2} \right)$$

Y sabemos que el ángulo formado por dos rectas al cortarse cumple la relación:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m_r - m_s}{1 + m_r \cdot m_s} \rightarrow \operatorname{tg} 45^\circ = \frac{\frac{-1}{2} - m_s}{1 + \left(\frac{-1}{2} \right) \cdot m_s}$$

Con $\alpha = 45^\circ$ un ángulo del primer cuadrante $\rightarrow \operatorname{tg}(45^\circ) = 1$

$$1 - \frac{m_s}{2} = \frac{-1}{2} - m_s \rightarrow 2 - m_s = -1 - 2m_s \rightarrow m_s = -3$$

Ya tenemos la pendiente de la recta s y un punto $P(2,3)$ por donde pasa. Podemos obtener la ecuación punto-pendiente.

$$s: y - 3 = -3(x - 2) \rightarrow s: 3x + y - 9 = 0$$

Una segunda solución sería la recta que pase por $P(2,3)$ y forme $\alpha = -45^\circ$ con la recta r . Esta segunda recta sería perpendicular a la primera recta obtenida:

$$m_{s'} \cdot m_s = -1 \rightarrow m_{s'} = \frac{1}{3}$$

La ecuación de esta recta s' será:

$$s': y - 3 = \frac{1}{3}(x - 2) \rightarrow s': x - 3y + 7 = 0$$

Hoja 3. Problema 6

Resuelto por María Luisa Marín (abril 2015)

6. Sean las rectas $r: 3x + 4y + 10 = 0$ y $s: 3x + 4y - 10 = 0$.

a) Escribe sus ecuaciones normales.

b) Calcula la distancia de cada una respecto al origen.

c) Calcula la distancia entre ambas rectas.

a) Ecuación normal de las dos rectas:

$$r: \frac{3x}{\sqrt{3^2+4^2}} + \frac{4y}{\sqrt{3^2+4^2}} + \frac{10}{\sqrt{3^2+4^2}} = 0 \rightarrow r: \frac{3x}{5} + \frac{4y}{5} + 2 = 0$$

$$s: \frac{3x}{\sqrt{3^2+4^2}} + \frac{4y}{\sqrt{3^2+4^2}} - \frac{10}{\sqrt{3^2+4^2}} = 0 \rightarrow s: \frac{3x}{5} + \frac{4y}{5} - 2 = 0$$

b) Para calcular la distancia de cada recta respecto al origen, recordamos que para la ecuación general de la recta $r: Ax + By + C = 0$ se cumple $d(O, r) = \left| \frac{-C}{\sqrt{A^2+B^2}} \right|$

$$d(O, r) = \left| \frac{-10}{\sqrt{3^2+4^2}} \right| = \frac{10}{\sqrt{25}} = 2$$

$$d(O, s) = \left| \frac{10}{\sqrt{3^2+4^2}} \right| = \frac{10}{\sqrt{25}} = 2$$

c) Para obtener la distancia entre dos rectas paralelas $r: Ax + By + C = 0$ y $s: Ax + By + C' = 0$, recordamos el resultado obtenido en clase:

$$d(r, s) = \left(\frac{C - C'}{\sqrt{A^2+B^2}} \right) \rightarrow d(r, s) = \left(\frac{10+10}{\sqrt{3^2+4^2}} \right) = \frac{20}{5} = 4$$

Hoja 3. Problema 8

Resuelto por Alejandro Muñoz de la Rosa (abril 2015)

8. Halla la distancia entre las rectas $r: x+y-3=0$ y $s: x+y+7=0$.

La distancia entre ambas rectas paralelas se obtiene del resultado teórico explicado en clase:

$$d(r, s) = \left| \frac{C - C'}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| = \left| \frac{-3 - 7}{\sqrt{1^2 + 1^2}} \right| = \left| \frac{-10}{\sqrt{2}} \right| = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$$