

Problemas – Tema 7

Solución a problemas de ampliación de los Temas 5 y 6 - Hoja 2 - Problemas 1, 2, 3, 5

Hoja 2. Problema 1

Resuelto por Javier Bermúdez (abril 2015)

1. Escribe la ecuación de la recta que pasando por el punto $P(2, -7)$ sea:

- a) paralela a la bisectriz del primer y tercer cuadrante.
- b) perpendicular a la bisectriz del segundo y cuarto cuadrante.

a) La bisectriz del primer cuadrante tiene pendiente 1, por que divide al cuadrante en dos mitades de 45° cada una. Una recta paralela a la bisectriz, tendrá esa misma pendiente

Usando la ecuación punto-pendiente:

$$1 = \frac{y+7}{x-2} \rightarrow y+7 = x-2 \rightarrow x-y-9=0$$

b) La ecuación de la bisectriz del primer y tercer cuadrante es perpendicular a la bisectriz del segundo y cuarto. Por lo tanto, necesitamos una recta que sea paralela a la bisectriz del primer y tercer cuadrante, y que pase por el punto $P(2, -7)$.

Y esta recta es la misma que hemos obtenido en el apartado anterior:

$$x-y-9=0$$

Hoja 2. Problema 2

Resuelto por Sergio García (abril 2015)

2. Obtener el ángulo que forman las rectas $r: \sqrt{3}x + y - 5 = 0$ y $s: 3x - \sqrt{3}y + 1 = 0$.

Podemos expresar el ángulo formado por dos rectas a partir de sus vectores directores:

$$\vec{u}_r = (-B, A) = (-1, \sqrt{3})$$

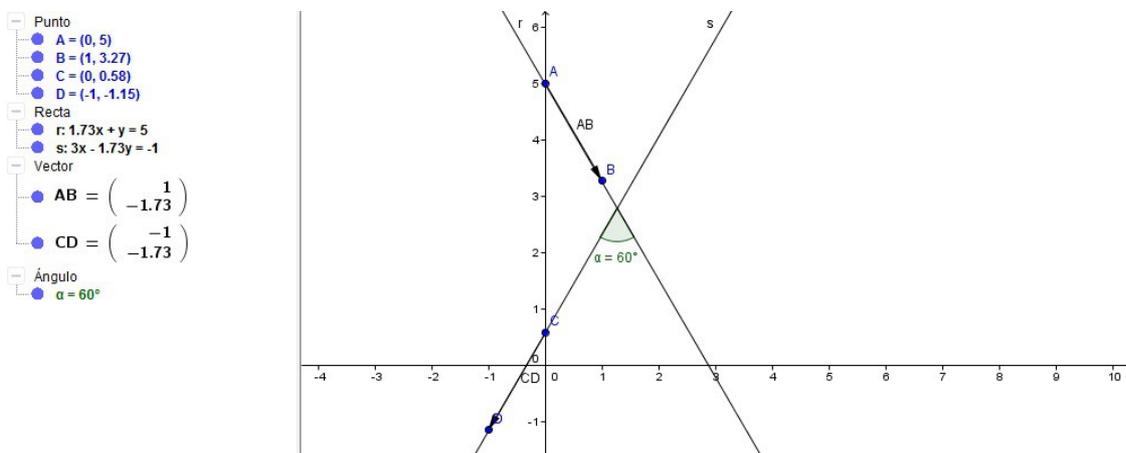
$$\vec{u}_s = (-B', A') = (\sqrt{3}, 3)$$

Tal y como demostramos en teoría:

$$\cos(\alpha) = \left| \frac{\vec{u}_r \cdot \vec{u}_s}{|\vec{u}_r| \cdot |\vec{u}_s|} \right| \rightarrow \cos(\alpha) = \left| \frac{A \cdot A' + B \cdot B'}{\sqrt{A^2 + B^2} \cdot \sqrt{(A')^2 + (B')^2}} \right|$$

Aplicado a nuestro problema:

$$\cos(\alpha) = \left| \frac{-\sqrt{3} + 3 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3+1} \cdot \sqrt{9+3}} \right| = \left| \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot \sqrt{12}} \right| = \left| \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}} \right| = \sqrt{\frac{3}{12}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = 60^\circ$$



Hoja 2. Problema 3

Resuelto por Javier de Orbe (abril 2015)

3. Escribe la ecuación general de una recta que pase por el punto $P(3,1)$ y forme con la recta $r: x-2y+7=0$ un ángulo de 45° .

Sea la recta:

$$r: x-2y+7=0 \rightarrow \text{pendiente} \rightarrow m_r = \frac{1}{2}$$

Buscamos una recta s que pase por $P(3,1)$ y forme un ángulo de 45° con r . Por lo tanto:

$$t g \gamma = \frac{m_r - m_s}{1 + m_r \cdot m_s} \rightarrow t g 45 = \frac{\frac{1}{2} - m_s}{1 + \frac{1}{2} \cdot m_s} \rightarrow 1 = \frac{\frac{1}{2} - m_s}{1 + \frac{1}{2} \cdot m_s} \rightarrow m_s = \frac{-1}{3}$$

Una vez obtenida la pendiente de la recta s podemos aplicar la ecuación punto pendiente de la recta, ya que debe pasar por el punto $P(3,1)$.

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0} \rightarrow x + 3y - 6 = 0$$

También debemos considerar el caso que el ángulo formado por ambas rectas sea de -45° , por lo que la tangente sería negativa. Obtendremos una recta perpendicular a s :

$$t g \gamma = \frac{m_r - m_t}{1 + m_r \cdot m_t} \rightarrow t g (-45^\circ) = \frac{\frac{1}{2} - m_t}{1 + \frac{1}{2} \cdot m_t} \rightarrow -1 = \frac{\frac{1}{2} - m_t}{1 + \frac{1}{2} \cdot m_t} \rightarrow m_t = 3$$

$$\text{Es decir} \rightarrow t: 3 = \frac{y-1}{x-3} \rightarrow t: 3x - y - 8 = 0$$

Hoja 2. Problema 5

Resuelto por Mario Olivares (abril 2015)

5. Las rectas $r: 3x+2y-1=0$ y $s: x+k \cdot y-2=0$ forman un ángulo de $\frac{\pi}{3}$ radianes.

Obtener el valor de k .

De la ecuación general de la recta podemos obtener la pendiente:

$$Ax + By + C = 0 \rightarrow m = \frac{-A}{B}$$

$$m_r = \frac{-3}{2}, \quad m_s = \frac{-1}{k}$$

Y podemos aplicar la fórmula que relaciona el ángulo γ formado por dos rectas con las pendientes de las rectas:

$$\operatorname{tg}(\gamma) = \frac{m_r - m_s}{1 + m_r m_s} \rightarrow \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\frac{-3}{2} + \frac{1}{k}}{1 + \frac{3}{2k}} \rightarrow \sqrt{3} = \frac{-3k + 2}{2k + 3}$$

$$3\sqrt{3} - 2 = -3k - 2\sqrt{3}k \rightarrow 2 - 3\sqrt{3} = 3k + 2\sqrt{3}k \rightarrow 2 - 3\sqrt{3} = (3 + 2\sqrt{3})k$$

$$k = \frac{2 - 3\sqrt{3}}{3 + 2\sqrt{3}}$$