Problemas – Tema 7

Solución a problemas de ampliación de los Temas 5 y 6 - Hoja 2 - Problemas 1, 2, 3, 5

Hoja 2. Problema 1

Resuelto por Javier Bermúdez (abril 2015)

1. Escribe la ecuación de la recta que pasando por el punto $P(2,-7)$ sea:

a) paralela a la bisectriz del primer y tercer cuadrante.

b) perpendicular a la bisectriz del segundo y cuarto cuadrante.

a) La bisectriz del primer cuadrante tiene pendiente 1, por que divide al cuadrante en dos mitades de 45º cada una. Una recta paralela a la bisectriz, tendrá esa misma pendiente
Usando la ecuación punto-pendiente:

$$1=\frac{y+7}{x-2} \rightarrow y+7=x-2 \rightarrow x-y-9=0$$

b) La ecuación de la bisectriz del primer y tercer cuadrante es perpendicular a la bisectriz del segundo cuarto. Por lo tanto, necesitamos una recta que sea paralela a la bisectriz del primer y tercer cuadrante, y que pase por el punto $P(2,-7)$.
Y esta recta es la misma que hemos obtenido en el apartado anterior:

$$x-y-9=0$$

Hoja 2. Problema 2

Resuelto por Sergio García (abril 2015)

2. Obtener el ángulo que forman las rectas $r: \sqrt{3}x+y-5=0$ **y** $s: 3x-\sqrt{3}y+1=0$ **.**

Podemos expresar el ángulo formado por dos rectas a partir de sus vectores directores:

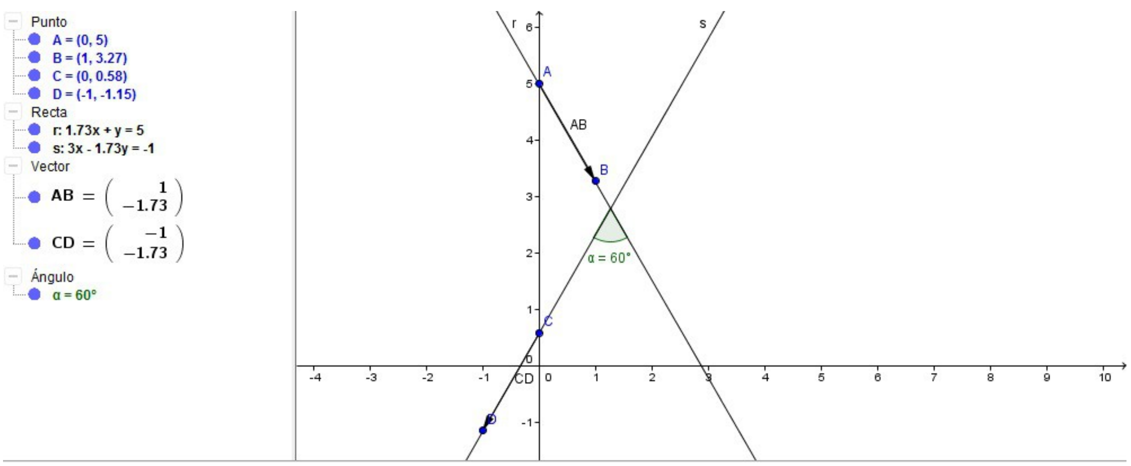
$$\vec{u}_r=(-B\,,A)=(-1,\sqrt{3})$$
$$\vec{u}_s=(-B'\,,A')=(\sqrt{3}\,,3)$$

Tal y como demostramos en teoría:

$$\cos(\alpha)=\left|\frac{\vec{u}_r\cdot\vec{u}_s}{|\vec{u}_r|\cdot|\vec{u}_s|}\right| \rightarrow \cos(\alpha)=\left|\frac{A\cdot A'+B\cdot B'}{\sqrt{A^2+B^2}\cdot\sqrt{(A')^2+(B')^2}}\right|$$

Aplicado a nuestro problema:

$$\cos(\alpha)=\left|\frac{-\sqrt{3}+3\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3+1}\cdot\sqrt{9+3}}\right|=\left|\frac{2\cdot\sqrt{3}}{2\cdot\sqrt{12}}\right|=\left|\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}}\right|=\sqrt{\frac{3}{12}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2} \rightarrow \alpha=60º$$



Hoja 2. Problema 3

Resuelto por Javier de Orbe (abril 2015)

3. Escribe la ecuación general de una recta que pase por el punto $P(3,1)$ y forme con la recta $r: x-2y+7=0$ un ángulo de 45º.

Sea la recta:

$r: x-2y+7=0$ → pendiente → $m_r=\frac{1}{2}$

Buscamos una recta s que pase por $P(3,1)$ y forme un ángulo de 45º con r. Por lo tanto:

$$tg\,\gamma=\frac{m_r-m_s}{1+m_r\cdot m_s} \rightarrow tg\,45=\frac{\frac{1}{2}-m_s}{1+\frac{1}{2}\cdot m_s} \rightarrow 1=\frac{\frac{1}{2}-m_s}{1+\frac{1}{2}\cdot m_s} \rightarrow m_s=\frac{-1}{3}$$

Una vez obtenida la pendiente de la recta s podemos aplicar la ecuación punto pendiente de la recta, ya que debe pasar por el punto $P(3,1)$.

$$m=\frac{y-y_0}{x-x_0} \rightarrow x+3y-6=0$$

También debemos considerar el caso que el ángulo formado por ambas rectas sea de -45º, por lo que la tangente sería negativa. Obtendremos una recta perpendicular a s:

$$tg\,\gamma=\frac{m_r-m_t}{1+m_r\cdot m_t} \rightarrow tg(-45^o)=\frac{\frac{1}{2}-m_t}{1+\frac{1}{2}\cdot m_t} \rightarrow -1=\frac{\frac{1}{2}-m_t}{1+\frac{1}{2}\cdot m_t} \rightarrow m_t=3$$

Es decir → $t: 3=\frac{y-1}{x-3}$ → $t: 3x-y-8=0$

Hoja 2. Problema 5

Resuelto por Mario Olivares (abril 2015)

5. Las rectas $r: 3x+2y-1=0$ y $s: x+k\cdot y-2=0$ forman un ángulo de $\frac{\pi}{3}$ radianes. Obtener el valor de k .

De la ecuación general de la recta podemos obtener la pendiente:

$$Ax+By+C=0 \quad \rightarrow \quad m=\frac{-A}{B}$$

$$m_r=\frac{-3}{2} \quad , \quad m_s=\frac{-1}{k}$$

Y podemos aplicar la fórmula que relaciona el ángulo γ formado por dos rectas con las pendientes de las rectas:

$$tg(\gamma)=\frac{m_r-m_s}{1+m_r m_s} \quad \rightarrow \quad tg\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\frac{-3}{2}+\frac{1}{k}}{1+\frac{3}{2k}} \quad \rightarrow \quad \sqrt{3}=\frac{\frac{-3k+2}{2\text{k}}}{\frac{2k+3}{2k}}$$

$$3\sqrt{3}-2=-3k-2\sqrt{3}k \quad \rightarrow \quad 2-3\sqrt{3}=3k+2\sqrt{3}k \quad \rightarrow \quad 2-3\sqrt{3}=(3+2\sqrt{3})k$$

$$k=\frac{2-3\sqrt{3}}{3+2\sqrt{3}}$$