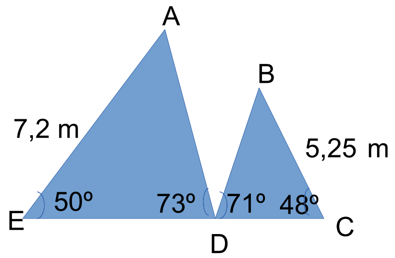
Problemas – Tema 7

Solución a problemas de ampliación de los Temas 5 y 6 - Hoja 16 - Todos resueltos

Hoja 16. Problema 1

Calcula la distancia entre los puntos A y B.



En el triángulo DAB se cumple → $\hat{D}=180º-73º-71º \rightarrow \hat{D}=36º$

Si obtenemos las distancias $\overline{DA}$ y $\overline{DB}$, podríamos aplicar el teorema del coseno para conseguir la distancia $\overline{AB}$ que nos pide el enunciado.

En el triángulo DAE, por el teorema del seno:

$$\frac{7{,}2}{sen(73º)}=\frac{\overline{DA}}{sen(50º)} \rightarrow \overline{DA}=5{,}77\,m$$

En el triángulo DBC, por el teorema del seno:

$$\frac{5{,}25}{sen(71º)}=\frac{\overline{DB}}{sen(48º)} \rightarrow \overline{DB}=4{,}13\,m$$

En el triángulo DAB, por el teorema del coseno:

$$(\overline{AB})^2=(5{,}77)^2+(4{,}13)^2-2\cdot 5{,}77\cdot 4{,}13\cdot\cos(36º)$$

$$(\overline{AB})^2=33{,}29+17{,}06-47{,}66\cdot\cos(36º)$$

$$(\overline{AB})^2=11{,}79$$

$$\overline{AB}=3{,}43\,m$$

Hoja 16. Problema 2

Resuelve $\left\{\begin{array}{c} \log x+\log(y+3)=\log 6 \\ \log\frac{x+7}{y+2}=1 \end{array}\right\}$

$$\left\{\begin{array}{c} \log x+\log(y+3)=\log 6 \\ \log\frac{x+7}{y+2}=1 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{c} \log[x(y+3)]=\log 6 \\ \log\frac{x+7}{y+2}=\log(10) \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{c} x(y+3)=6 \\ \frac{x+7}{y+2}=10 \end{array}\right\}$$

De la primera ecuación → $x=\frac{6}{y+3}$ → Sustituimos en la segunda ecuación del sistema.

$$\frac{\frac{6}{y+3}+7}{y+2}=10 \rightarrow \frac{6+7y+21}{y+3}=10y+20 \rightarrow 7y+27=(10y+20)(y+3)$$

$$7y+27=10y^2+30y+20y+60 \rightarrow 10y^2+43y+33=0$$

$$y=\frac{-43\pm\sqrt{43^2-4\cdot 10\cdot 33}}{2\cdot 10}=\frac{-43\pm 23}{20} \rightarrow y=\frac{-33}{10} \quad , \quad y=-1$$

La solución $y=\frac{-33}{10}$ no es posible, ya que hace negativo el argumento de $\log(y+3)$.

Si $y=-1$, $x=\frac{6}{y+3} \rightarrow x=3$

Hoja 16. Problema 3

Sea un triángulo de vértices $A(0,0)$, $B(8,-10)$ y $C(4,6)$. Obtener circuncentro y ecuación de la circunferencia circunscrita.

Para obtener el circuncentro basta con obtener la intersección de dos de las mediatrices del triángulo.
En primer lugar obtenemos el punto medio del lado de vértices $A(0,0)$ y $B(8,-10)$.

$$D=PM(\overline{AB})=(4,-5)$$

La recta r que une los vértices $A(0,0)$ y $B(8,-10)$ tiene por ecuación:

$$r:\frac{-10-0}{8-0}=\frac{y-0}{x-0} \rightarrow r:y=\frac{-5}{4}x \rightarrow m_r=\frac{-5}{4}$$

Por lo tanto, una recta perpendicular a r será $r_{perpendicular}$ y tendrá por pendiente:

$$m_r\cdot m_{r_{perpendicular}}=-1 \rightarrow m_{r_{perpendicular}}=\frac{4}{5}$$

Si esta recta $r_{perpendicular}$ pasa por el punto medio $D(4,-5)$ calculado anteriormente, tendremos la mediatriz del lado de vértices $A(0,0)$ y $B(8,-10)$. Podemos expresar su ecuación punto-pendiente de la forma:

$r_{perpendicular}:\frac{4}{5}=\frac{y+5}{x-4}$ → Mediatriz del lado de vértices $A(0,0)$ y $B(8,-10)$

Repetimos el mismo razonamiento para el lado de vértices $A(0,0)$ y $C(4,6)$.

El punto medio de este lado será:

$$E=PM(\overline{AC})=(2,3)$$

La recta s que une los vértices $A(0,0)$ y $C(4,6)$ tiene por ecuación:

$$s:\frac{6-0}{4-0}=\frac{y-0}{x-0} \quad \rightarrow \quad s:y=\frac{3}{2}x \quad \rightarrow \quad m_s=\frac{3}{2}$$

Por lo tanto, una recta perpendicular a s será $s_{perpendicular}$ y tendrá por pendiente:

$$m_s \cdot m_{s_{perpendicular}}=-1 \quad \rightarrow \quad m_{s_{perpendicular}}=\frac{-2}{3}$$

Si esta recta $s_{perpendicular}$ pasa por el punto medio $E(2,3)$ calculado anteriormente, tendremos la mediatriz del lado de vértices $A(0,0)$ y $C(4,6)$. Podemos expresar su ecuación punto-pendiente de la forma:

$$s_{perpendicular}:\frac{-2}{3}=\frac{y-3}{x-2}$$ → Mediatriz del lado de vértices $A(0,0)$ y $C(4,6)$

El circuncentro será la intersección de las dos mediatrices calculadas.

$$\begin{Bmatrix} \frac{4}{5}=\frac{y+5}{x-4} \\ \frac{-2}{3}=\frac{y-3}{x-2} \end{Bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{Bmatrix} 4x-16=5y+25 \\ -2x+4=3y-9 \end{Bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{Bmatrix} 4x-41=5y \\ -2x+13=3y \end{Bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{Bmatrix} \frac{4x-41}{5}=y \\ \frac{-2x+13}{3}=y \end{Bmatrix}$$

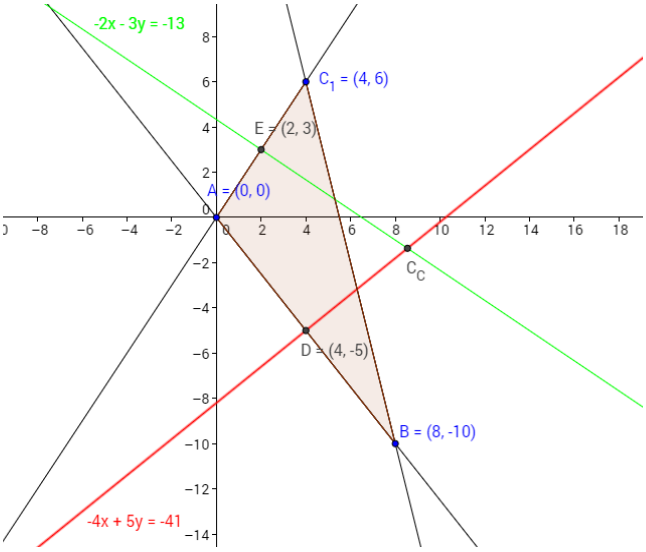
Resolvemos por igualación:

$$\frac{4x-41}{5}=\frac{-2x+13}{3} \quad \rightarrow \quad 12x-123=-10x+65 \quad \rightarrow \quad 22x=188 \quad \rightarrow \quad x=\frac{188}{22}=\frac{94}{11}$$

$$y=\frac{4x-41}{5} \quad \rightarrow \quad y=\frac{4\frac{94}{11}-41}{5} \quad \rightarrow \quad y=\frac{376-451}{55}=\frac{-75}{55}=\frac{-15}{11}$$

Por lo tanto el circuncentro tiene por coordenadas:

$$C_C=(\frac{94}{11},\frac{-15}{11}) \quad \rightarrow \quad \textit{Circuncentro } C_c \textit{ solución}$$

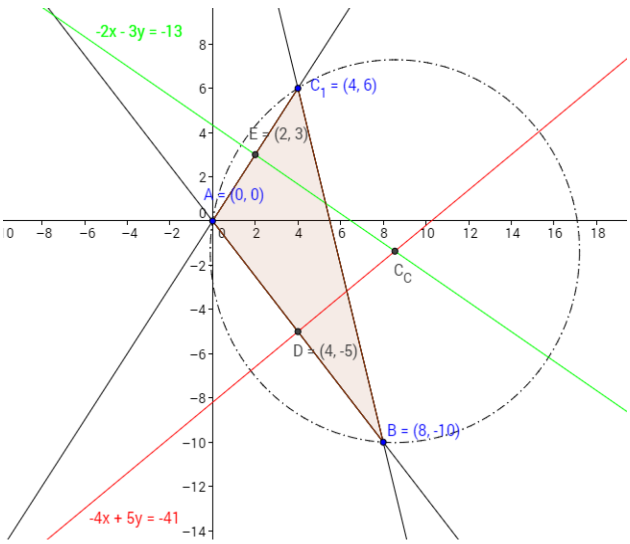


La circunferencia circunscrita está centrada en el circuncentro $C_C = (\frac{94}{11}, \frac{-15}{11})$. Y el radio es la distancia del circuncentro a uno de los vértices. Lo más sencillo es obtener la distancia del centro al vértice $A(0,0)$.

$$d(C_c, A) = r = \sqrt{\frac{9061}{121}}$$

Por lo tanto la ecuación de la circunferencia resulta:

$$\left(x - \frac{94}{11}\right)^2 + \left(y + \frac{15}{11}\right)^2 = \frac{9061}{121} \rightarrow \textit{Circunferencia circunscrita}$$



Hoja 13. Problema 4

Calcula la ecuación de la elipse que pasa por el punto $P(8,3)$, con centro el origen de coordenadas, focos en el eje de abscisas y eje menor igual a 10 . Represéntala gráficamente, indicando las coordenadas de los puntos $A,\ A',\ B,\ B',\ F,\ F'$.

Según los datos del enunciado, tenemos una elipse de ejes coincidentes con los ejes cartesianos y focos sobre el eje OX.

$$2\text{b}=10 \quad \rightarrow \quad b=5$$
$$O(0,0)\equiv centro$$
$$F(c,0) \quad , \quad F'(-c,0)$$

La ecuación de la elipse será:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{5^2}=1$$

Con $a\geq 5$ por ser a el semieje mayor.

El enunciado nos dice que la elipse pasa por el punto $P(8,3)$, por lo que sustituyendo en la ecuación de la elipse podemos obtener el valor de a .

$$P\in\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{5^2}=1 \quad \rightarrow \quad \frac{64}{a^2}+\frac{9}{25}=1 \quad \rightarrow \quad \frac{64}{a^2}=\frac{16}{25} \quad \rightarrow \quad a=10$$

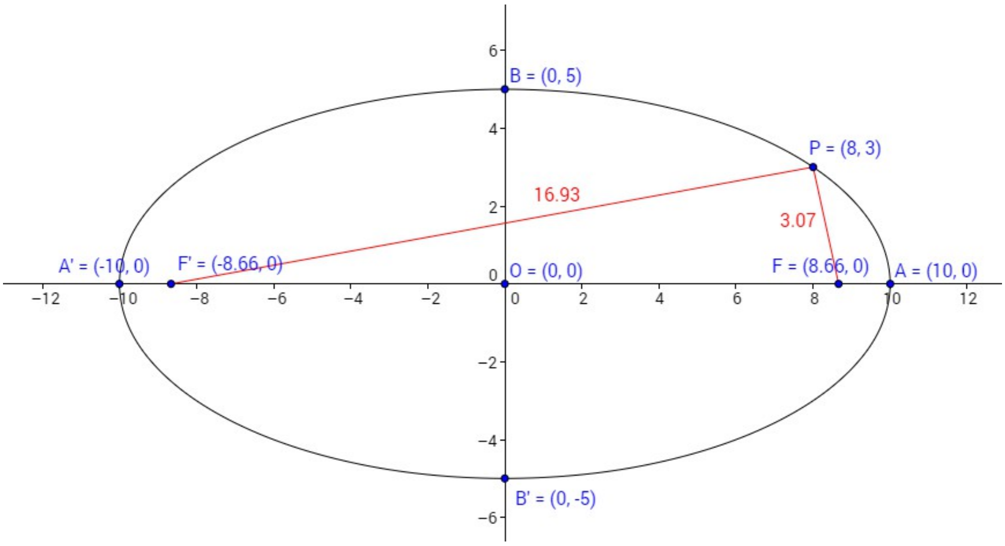
El valor de la semidistancia focal c lo obtenemos de la relación general que cumplen los parámetros de la elipse.

$$a^2=b^2+c^2 \quad \rightarrow \quad 100=25+c^2 \quad \rightarrow \quad c=\sqrt{75}$$

Ya tenemos todos los datos para representar gráficamente la elipse y sus puntos más característicos.

$$\frac{x^2}{10^2}+\frac{y^2}{5^2}=1$$

$La \ suma \ de \ distancias \ de \ P \ a \ F \ y \ a \ F' \ es \ el \ doble \ del \ eje \ mayor \rightarrow \ 2a=20$



Hoja 13. Problema 5

Sea una circunferencia de centro $(0,2)$ y radio 2 unidades. Sea una segunda circunferencia de centro $(3,0)$ y radio 3 unidades. Ambas circunferencias se cortan en los puntos A y B . Obtener la recta que une a los puntos A y B .

La circunferencia de centro $(0,2)$ y radio 2 tiene por ecuación:

$$x^2+(y-2)^2=4$$

Mientras que la circunferencia de centro $(3,0)$ y radio 3 tiene por ecuación:

$$(x-3)^2+y^2=9$$

Los puntos de corte de ambas circunferencias son la solución del siguiente sistema:

$$\begin{Bmatrix} x^2+(y-2)^2=4 \\ (x-3)^2+y^2=9 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} x^2+(y-2)^2=4 \\ y=\pm\sqrt{9-(x-3)^2} \end{Bmatrix} \rightarrow \text{Sustituimos} \rightarrow \quad x^2+(\pm\sqrt{9-(x-3)^2}-2)^2=4$$

Desarrollamos el binomio (fíjate que arrastramos los dos signos + y – delante de la raíz).

$$x^2+9-(x-3)^2+4\pm4\sqrt{9-(x-3)^2}=4 \quad \rightarrow \quad x^2+9-(x^2+9-6\text{x})=\pm4\sqrt{9-(x-3)^2}$$
$$6\text{x}=\pm4\sqrt{9-(x-3)^2}$$

Elevamos al cuadrado ambos miembros (fíjate que, al elevar al cuadrado, los signos + y – delante de la raíz quedan ambos como positivo).

$$36\text{x}^2=16(9-(x^2+9-6\text{x})) \quad \rightarrow \quad 36\text{x}^2=16(-x^2+6\text{x}) \quad \rightarrow \quad 36\text{x}^2=-16x^2+96x$$
$$52x^2-96x=0 \quad \rightarrow \quad x(52x-96)=0$$

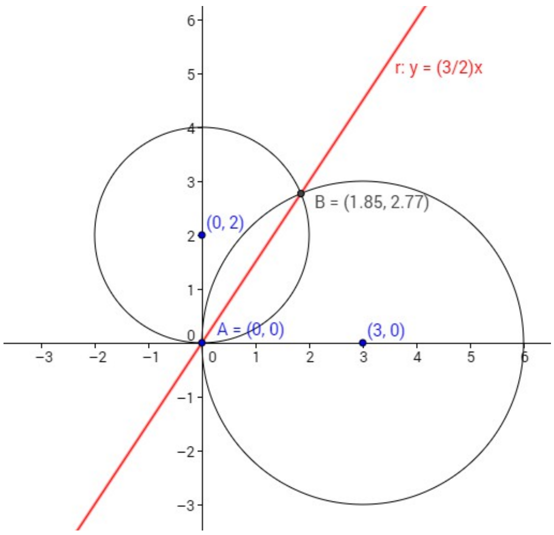
La dos soluciones son:

$x=0$ → Sustituimos por ejemplo en $(x-3)^2+y^2=9 \rightarrow y=0 \rightarrow A(0,0)$

$x=\frac{96}{52}=\frac{24}{13}$ → Sustituimos en $(x-3)^2+y^2=9 \rightarrow y=\frac{36}{13} \rightarrow B\left(\frac{24}{13},\frac{36}{13}\right)$

Por lo tanto la recta que una ambos puntos solución es:

$$\frac{\frac{36}{13}}{\frac{24}{13}}=\frac{y}{x} \rightarrow y=\frac{3}{2}x$$



Hoja 13. Problema 6

Resuelve $sen^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{2}$

Desarrollamos → $sen^4 x = (sen^2 x)^2 = (1 - \cos^2 x)^2 = 1 + \cos^4 x - 2\cos^2 x$

Sustituimos en la ecuación de partida.

$$1 + \cos^4 x - 2\cos^2 x - \cos^4 x = \frac{1}{2} \rightarrow 1 - 2\cos^2 x = \frac{1}{2} \rightarrow -2\cos^2 x = \frac{-1}{2} \rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{4}$$

$$\cos x = \pm\frac{1}{2}$$

Si $\cos x = \frac{1}{2} \rightarrow x = 60º + 360º k, k \in \mathbb{R}$, $x = 300º + 360º k, k \in \mathbb{R}$

Si $\cos x = -\frac{1}{2} \rightarrow x = 120º + 360º k, k \in \mathbb{R}$, $x = 240º + 360º k, k \in \mathbb{R}$

Podemos agrupar las cuatro soluciones → $x = 60º + 180º k, k \in \mathbb{R}$, $x = 120º + 180º k, k \in \mathbb{R}$

Hoja 13. Problema 7

Sean $\vec{u}=(1,k,0)$ y $\vec{v}=(8,1,1)$. ¿Cuánto vale k para que sean perpendiculares?

Dos vectores son perpendiculares si su producto escolar es nulo.

$\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \quad \rightarrow \quad 1\cdot 8+k\cdot 1+0\cdot 1=0 \quad \rightarrow \quad k=-8$

Hoja 13. Problema 8

Sea la recta $r: x+2y-a=0$ **y la circunferencia** $x^2+y^2=9$ **. Calcula** a **para que la recta y la circunferencia sean secantes y tangentes.**

Si la recta es secante a la circunferencia, tendremos dos puntos de corte. Por lo tanto el siguiente sistema debe tener dos puntos solución:

$$\left\{\begin{matrix} x+2y-a=0 \\ x^2+y^2=9 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} x=a-2y \\ x^2+y^2=9 \end{matrix}\right\}$$

Resolvemos por sustitución:

$$(a-2y)^2+y^2=9 \rightarrow a^2+4y^2-4ay+y^2=9 \rightarrow 5y^2-4ay+a^2-9=0$$

Planteamos la soluciones de la ecuación de segundo grado:

$$y=\frac{4a\pm\sqrt{16a^2-20(a^2-9)}}{10}$$

Para que existan dos soluciones distintas, necesitamos que el discriminante de la raíz sea positivo. Por lo tanto:

$$16a^2-20(a^2-9)>0 \rightarrow -4a^2+180>0 \rightarrow \frac{180}{4}>a^2 \rightarrow 45>a^2$$

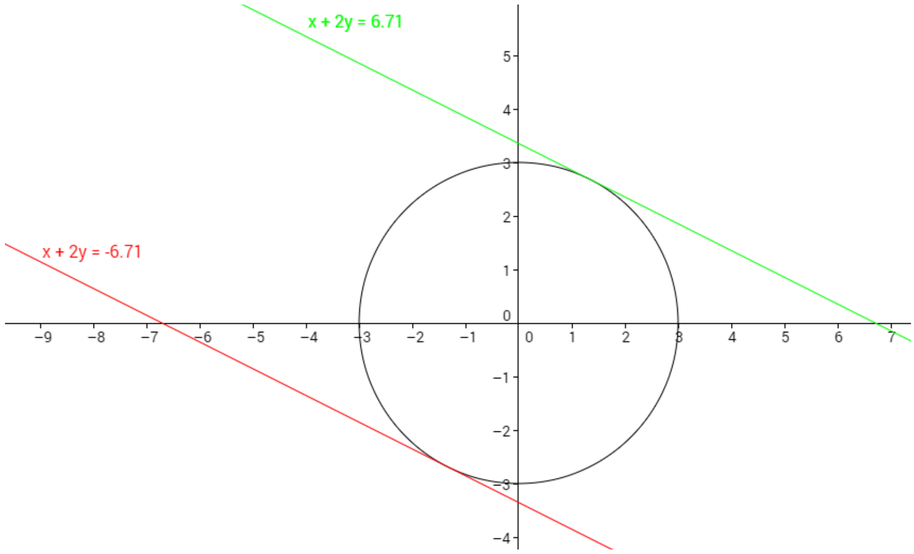
Y esta desigualdad implica que a pertenezca al siguiente intervalo:

$$a\in(-\sqrt{45},+\sqrt{45})$$

Para obtener una recta tangente, el planteamiento del apartado anterior sigue siendo válido pero imponiendo la condición de que el discriminante de la raíz sea igual a cero (para forzar así que la solución sea única). Por lo tanto:

$$16a^2-20(a^2-9)=0 \rightarrow a=\pm\sqrt{45}$$

Las rectas $r: x+2y+\sqrt{45}=0$ *y* $s: x+2y-\sqrt{45}=0$ *tangentes a circunferencia* $x^2+y^2=9$



Hoja 13. Problema 9

El producto de dos números complejos es $4i$, y el cubo de uno de ellos dividido por el otro resulta $\frac{1}{4}$. Halla los módulos y los argumentos de ambos complejos de partida.

Los dos números complejos, en forma polar, son:

$$z_1 = |z_1|_\alpha \quad , \quad z_2 = |z_2|_\beta$$

El valor imaginario puro $4i$ en forma polar es 4_{90^o} . Las condiciones a cumplir son:

$$|z_1| \cdot |z_2| = 4$$
$$\alpha + \beta = 90^o$$

El valor real $\frac{1}{4}$ en forma polar es $\left(\frac{1}{4}\right)_{0^o}$. Las condiciones a cumplir son:

$$\frac{|z_1|^3}{|z_2|} = \frac{1}{4}$$
$$3 \cdot \alpha - \beta = 0^o$$

Podemos formar dos sistemas de dos ecuaciones y dos incógnitas cada uno.
El primer sistema implica a las fases.

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha + \beta = 90^o \\ 3\alpha - \beta = 0^o \end{array} \right\}$$

De la segunda ecuación $\beta = 3\alpha$ → Sustituimos en la primera → $4\alpha = 90^o$
Por lo tanto → $\alpha = 22{,}5^o$ y $\beta = 67{,}5^o$

El segundo sistema implica a los módulos.

$$\begin{Bmatrix} |z_1|\cdot|z_2|=4 \\ \dfrac{|z_1|^3}{|z_2|}=\dfrac{1}{4} \end{Bmatrix}$$

De la primera ecuación → $|z_2|=\dfrac{4}{|z_1|}$ → Sustituimos en la segunda → $\dfrac{|z_1|^3}{\dfrac{4}{|z_1|}}=\dfrac{1}{4}$ →

$|z_1|^4=1$ → $|z_1|=1$ → Tomamos solución positiva porque el módulo, por definición, es una cantidad positiva.

Por lo tanto → $|z_2|=4$

La solución final resulta:

$$z_1=1_{22,5^o} \quad , \quad z_2=4_{67,5^o}$$

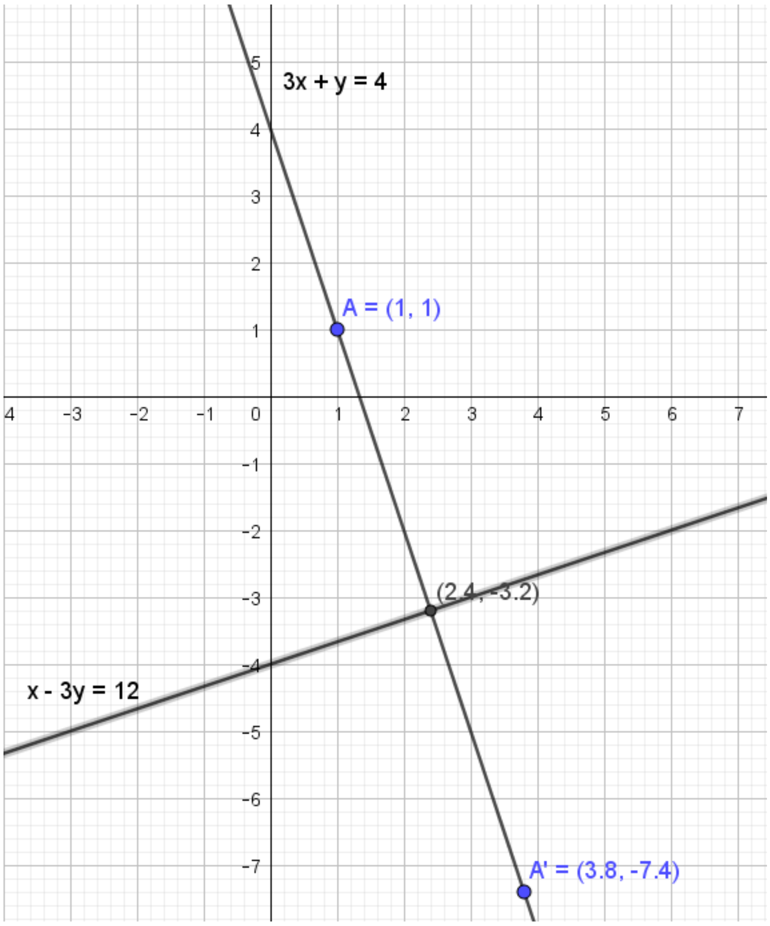
Donde podemos sumar, a cada fase, el número de vueltas completas de 360º que queramos.

Hoja 13. Problema 10

Halla el punto simétrico de $A(1,1)$ **respecto de la recta** $r: x-3y-12=0$ **.**

Saco la recta perpendicular a r y que pase por el punto A . Con un sistema entre esa recta y la recta r , saco el punto de corte. Y ese punto de corte es el punto medio del segmento que une A con su simétrico A' .

Como somos expertos en Geogebra, doy la solución con una gráfica en Geogebra.



Hoja 13. Problema 11

Calcular la mediatriz del segmento formado por los puntos $A(-1,4)$ **y** $B(2,-8)$ **.**

Punto medio → semisuma de componentes → $C=(1/2,-2)$

Vector $\vec{AB}=(3,-12)$ → $m_{\vec{AB}}=-12/3=-4$

Con un punto y una recta, sacamos la ecuación punto-pendiente.

$$r:-4=\frac{y+2}{x-\frac{1}{2}}$$

Hoja 13. Problema 12

Obtener el ángulo que forman los vectores $\vec{u}=(1,1,0)$ **y** $\vec{v}=(8,1,1)$ **.**

El ángulo formado por ambos vectores es:

$$\alpha=arcocos\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}\right)=arcocos\left(\frac{9}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{66}}\right)=38,43^{o}$$