Problemas – Tema 7

Solución a problemas de ampliación de los Temas 5 y 6 - Hoja 13 - Todos resueltos

Hoja 13. Problema 1

1. Sea una circunferencia de centro $(0,2)$ y radio 2 unidades. Sea una segunda circunferencia de centro $(3,0)$ y radio 3 unidades. Ambas circunferencias se cortan en los puntos A y B. Obtener la recta que une a los puntos A y B.

La circunferencia de centro $(0,2)$ y radio 2 tiene por ecuación:

$$x^2+(y-2)^2=4$$

Mientras que la circunferencia de centro $(3,0)$ y radio 3 tiene por ecuación:

$$(x-3)^2+y^2=9$$

Los puntos de corte de ambas circunferencias son la solución del siguiente sistema:

$$\left\{\begin{matrix} x^2+(y-2)^2=4 \\ (x-3)^2+y^2=9 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} x^2+(y-2)^2=4 \\ y=\sqrt{9-(x-3)^2} \end{matrix}\right\} \rightarrow x^2+\left(\sqrt{9-(x-3)^2}-2\right)^2=4$$

Desarrollamos el binomio:

$$x^2+9-(x-3)^2+4-4\sqrt{9-(x-3)^2}=4 \rightarrow x^2+9-(x^2+9-6x)=4\sqrt{9-(x-3)^2}$$
$$6x=4\sqrt{9-(x-3)^2}$$

Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$36x^2=16(9-(x^2+9-6x)) \rightarrow 36x^2=16(-x^2+6x) \rightarrow 36x^2=-16x^2+96x$

$52x^2-96x=0 \rightarrow x(52x-96)=0$

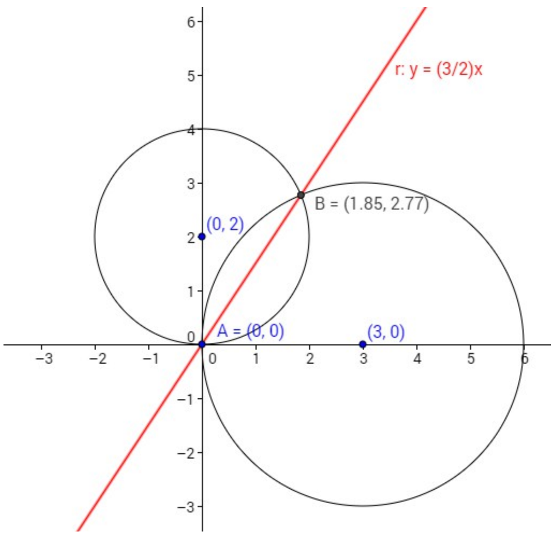
La dos soluciones son:

$x=0$ → Sustituimos por ejemplo en $(x-3)^2+y^2=9 \rightarrow y=0 \rightarrow A(0,0)$

$x=\frac{96}{52}=\frac{24}{13}$ → Sustituimos en $(x-3)^2+y^2=9 \rightarrow y=\frac{36}{13} \rightarrow B(\frac{24}{13},\frac{36}{13})$

Por lo tanto la recta que una ambos puntos solución es:

$$\frac{\frac{36}{13}}{\frac{24}{13}}=\frac{y}{x} \rightarrow y=\frac{3}{2}x$$



Hoja 13. Problema 2

2. a) Sea un segmento de extremo inicial $A(1,2)$ y extremo final $B(3,-2)$. Obtener los extremos del segmento simétrico respecto a la simetría central de centro el punto $P(0,5)$.

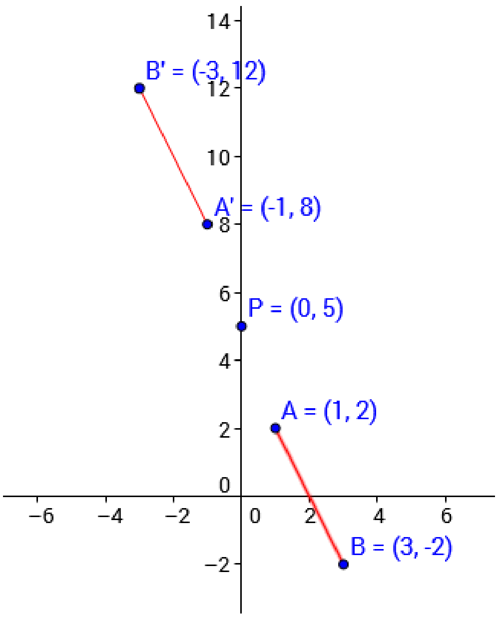
b) Obtener el ángulo formado por el corte de las rectas $r:\frac{x}{-2}+\frac{y}{4}=1$ **y** $s: y=\frac{-1}{3}x-1$

a) Debemos obtener los puntos simétricos $A'(x_A,y_A)$ y $B'(x_B,y_B)$ respecto al centro de simetría $P(0,5)$.

El centro de simetría es el punto medio de los segmentos $\overline{AA'}$ y $\overline{BB'}$ respectivamente. Por lo tanto:

$$(0,5)=\left(\frac{1+x_A}{2},\frac{2+y_A}{2}\right) \rightarrow A'(x_A,y_A)=(-1,8)$$

$$(0,5)=\left(\frac{3+x_B}{2},\frac{-2+y_B}{2}\right) \rightarrow B'(x_B,y_B)=(-3,12)$$



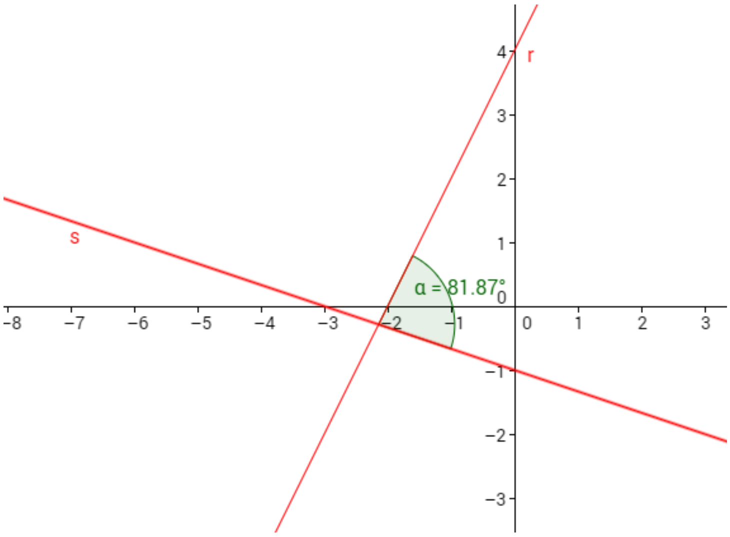
b) Sean las rectas $r:\frac{x}{-2}+\frac{y}{4}=1$ y $s: y=\frac{-1}{3}x-1$. Sus pendientes son:

$$r: \frac{x}{-2}+\frac{y}{4}=1 \quad \rightarrow \quad r: y=2x+4 \quad \rightarrow \quad m_r=2$$

$$s: y=\frac{-1}{3}x-1 \quad \rightarrow \quad m_s=\frac{-1}{3}$$

El ángulo formado por el corte de ambas rectas cumple la siguiente relación para su tangente:

$$tg(\alpha)=\left|\frac{m_r-m_s}{1+m_r \cdot m_s}\right|=\left|\frac{2+\frac{1}{3}}{1-\frac{2}{3}}\right|=7 \quad \rightarrow \quad \alpha \simeq 81,87^o$$



Hoja 13. Problema 3

3.a) Determina la ecuación de las rectas tangentes a la elipse $2x^2+y^2=8$ trazadas desde el punto $P(-1,5)$.

b) Obtener la ecuación de la elipse de focos sobre una recta paralela al eje de abscisas, centrada en $(-1,3)$, con semieje menor 8 y excentricidad $\frac{3}{5}$.

a) El haz de rectas con ecuación punto-pendiente que pasa por el punto $P(-1,5)$ es:

$$m=\frac{y-5}{x+1} \rightarrow y=m(x+1)+5$$

Si llevamos este valor a la ecuación de la elipse:

$$2x^2+(m(x+1)+5)^2=8 \rightarrow 2x^2+m^2(x+1)^2+25+10m(x+1)=8$$

$$2x^2+m^2(x^2+1+2\mathrm{x})+25+10m(x+1)=8 \rightarrow x^2(2+m^2)+x(2m^2+10m)+m^2+10\mathrm{m}+17=0$$

Resolvemos:

$$x=\frac{-(2m^2+10m)\pm\sqrt{(2m^2+10m)^2-4(2+m^2)(m^2+10m+17)}}{2(2+m^2)}$$

Para que la recta sea tangente, necesitamos que la solución de la ecuación de segundo grado sea única. Por lo que imponemos al condición de que el discriminante sea igual a 0.

$$(2m^2+10m)^2-4(2+m^2)(m^2+10m+17)=0$$

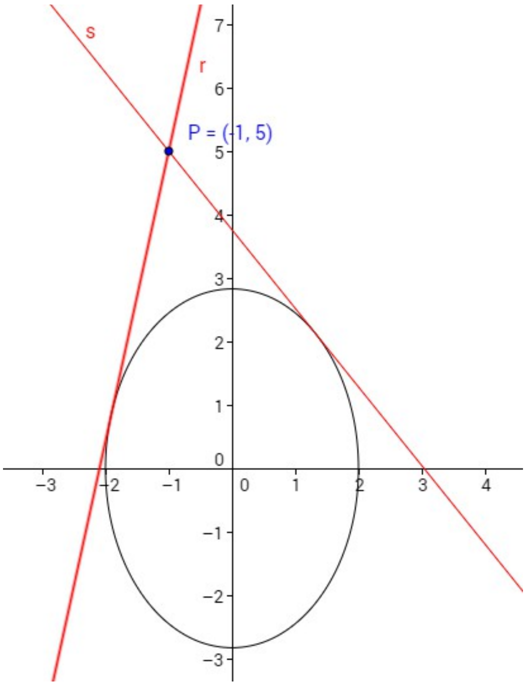
$$3\mathrm{m}^2-10m-17=0$$

$$m=\frac{10\pm\sqrt{100+204}}{6}=\frac{10\pm\sqrt{304}}{6} \rightarrow m\simeq 4{,}57 \quad , \quad m\simeq -1{,}23$$

Ya tenemos la dos pendientes de las rectas tangentes que pasan por $P(-1,5)$.

$$r: 4,57=\frac{y-5}{x+1} \quad \rightarrow \quad r: y=4,57x+9,57$$

$$s: -1,23=\frac{y-5}{x+1} \quad \rightarrow \quad s: y=-1,23x+3,76$$



b) La expresión general de la elipse con focos sobre recta paralela al eje de abscisas será:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

Por los datos del enunciado:

$$(x_{0,}\, y_0)=(-1,3)$$

$$b=8$$

$$e=\frac{c}{a}=\frac{3}{5}$$

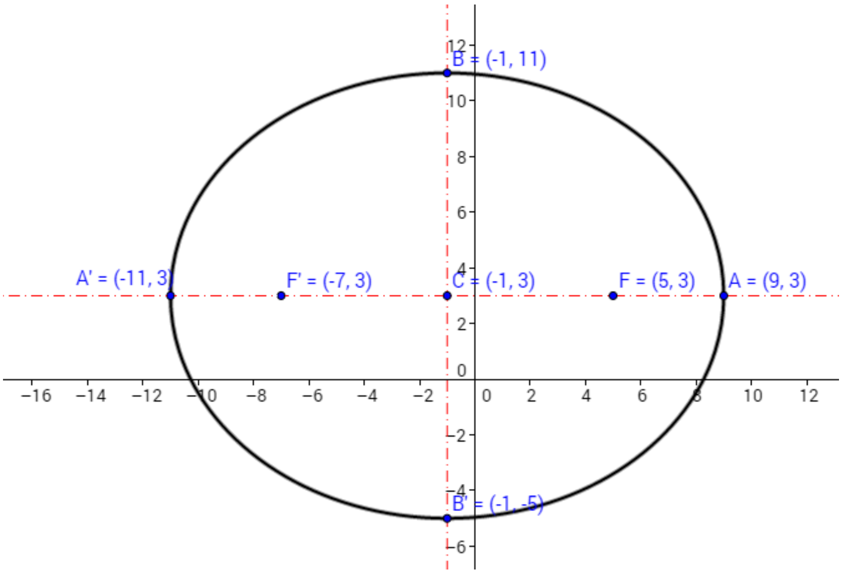
Sabemos que toda elipse cumple su relación fundamental $a^2=b^2+c^2$. Y si $b=8$ y

$c=\frac{3}{5}a$ podemos expresar esta relación fundamental de la forma:

$$a^2=64+\frac{9}{25}a^2 \quad \rightarrow \quad a=10$$

Y la ecuación de la elipse resulta:

$$\frac{(x+1)^2}{10^2}+\frac{(y-3)^2}{8^2}=1$$



Hoja 13. Problema 4

4. Dada la elipse $x^2+2y^2=6$, obtener las coordenadas de un rectángulo inscrito en la elipse, de lados paralelos a los ejes de la elipse, y de perímetro 12 unidades. Representa la elipse gráficamente, indicando las coordenadas de los puntos A, A', B, B', F, F' , y representa también los cuatro vértices del rectángulo solución.

Tenemos una elipse centrada en el origen de coordenadas, con ejes coincidentes con los cartesianos y focos sobre el eje OX.

El rectángulo inscrito de lados paralelos a los ejes tendrá los cuatro vértices sobre la elipse: un vértice P_1 en el primer cuadrante, otro P_2 en el segundo, otro P_3 en el tercero y el último P_4 en el cuarto.

Supongo que las coordenadas de P_1 son $P_1(x,y)$. De esta forma $P_2(-x,y)$, $P_3(-x,-y)$, $P_4(x,-y)$.

Por lo tanto el perímetro de la elipse será:

$$12=2x+2x+2y+2y \rightarrow 3=x+y \rightarrow y=3-x$$

Este resultado lo llevo a la ecuación de la elipse para obtener las coordenadas (x,y) .

$$x^2+2(3-x)^2=6 \rightarrow x^2+18+2x^2-12x=6 \rightarrow 3\mathrm{x}^2-12x+12=0 \rightarrow x^2-4x+4=0$$

Resolvemos:

$$x=\frac{4\pm\sqrt{16-16}}{2}=2 \rightarrow y=3-2=1$$

Por lo tanto:

$$P_1(x,y)=(2,1)$$
$$P_2(-x,y)=(-2,1)$$
$$P_3(-x,-y)=(-2,-1)$$
$$P_4(x,-y)=(2,-1)$$

Para obtener los puntos característicos de la elipse necesitamos los valores del semieje menor y mayor:

$$x^2+2y^2=6 \quad \rightarrow \quad \frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1 \quad \rightarrow \quad \frac{x^2}{(\sqrt{6})^2}+\frac{y^2}{(\sqrt{3})^2}=1 \quad \rightarrow \quad a=+\sqrt{6} \quad , \quad b=+\sqrt{3}$$

Y de la relación general que cumple toda elipse:

$$a^2=b^2+c^2 \quad \rightarrow \quad 6=3+c^2 \quad \rightarrow \quad c=+\sqrt{3}$$

Y ya podemos representar la cónica y el rectángulo inscrito.