Problemas – Tema 7

Solución a problemas de ampliación de los Temas 5 y 6 - Hoja 12 - Todos resueltos

Hoja 12. Problema 1

1. Sea un triángulo de vértices $A(0,0)$, $B(8,-10)$ y $C(4,6)$. Obtener:

a) Circuncentro (punto de intersección de las mediatrices).

b) Ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo, con centro en el circuncentro y radio igual a la distancia del circuncentro a uno de los vértices del triángulo.

a) Para obtener el circuncentro basta con obtener la intersección de dos de las mediatrices del triángulo.

En primer lugar obtenemos el punto medio del lado de vértices $A(0,0)$ y $B(8,-10)$.

$$D=PM(\overline{AB})=(4,-5)$$

La recta r que une los vértices $A(0,0)$ y $B(8,-10)$ tiene por ecuación:

$$r:\frac{-10-0}{8-0}=\frac{y-0}{x-0} \rightarrow r:y=\frac{-5}{4}x \rightarrow m_r=\frac{-5}{4}$$

Por lo tanto, una recta perpendicular a r será $r_{perpendicular}$ y tendrá por pendiente:

$$m_r \cdot m_{r_{perpendicular}}=-1 \rightarrow m_{r_{perpendicular}}=\frac{4}{5}$$

Si esta recta $r_{perpendicular}$ pasa por el punto medio $D(4,-5)$ calculado anteriormente, tendremos la mediatriz del lado de vértices $A(0,0)$ y $B(8,-10)$. Podemos expresar su ecuación punto-pendiente de la forma:

$r_{perpendicular}: \frac{4}{5}=\frac{y+5}{x-4}$ → Mediatriz del lado de vértices $A(0,0)$ y $B(8,-10)$

Repetimos el mismo razonamiento para el lado de vértices $A(0,0)$ y $C(4,6)$.
El punto medio de este lado será:

$$E=PM(\overline{AC})=(2,3)$$

La recta s que une los vértices $A(0,0)$ y $C(4,6)$ tiene por ecuación:

$$s: \frac{6-0}{4-0}=\frac{y-0}{x-0} \rightarrow s: y=\frac{3}{2}x \rightarrow m_s=\frac{3}{2}$$

Por lo tanto, una recta perpendicular a s será $s_{perpendicular}$ y tendrá por pendiente:

$$m_s \cdot m_{s_{perpendicular}}=-1 \rightarrow m_{s_{perpendicular}}=\frac{-2}{3}$$

Si esta recta $s_{perpendicular}$ pasa por el punto medio $E(2,3)$ calculado anteriormente, tendremos la mediatriz del lado de vértices $A(0,0)$ y $C(4,6)$. Podemos expresar su ecuación punto-pendiente de la forma:

$s_{perpendicular}: \frac{-2}{3}=\frac{y-3}{x-2}$ → Mediatriz del lado de vértices $A(0,0)$ y $C(4,6)$

El circuncentro será la intersección de las dos mediatrices calculadas.

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{4}{5}=\frac{y+5}{x-4}\\ \frac{-2}{3}=\frac{y-3}{x-2}\end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l}4x-16=5y+25\\ -2x+4=3y-9\end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l}4x-41=5y\\ -2x+13=3y\end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l}\frac{4x-41}{5}=y\\ \frac{-2x+13}{3}=y\end{array}\right\}$$

Resolvemos por igualación:

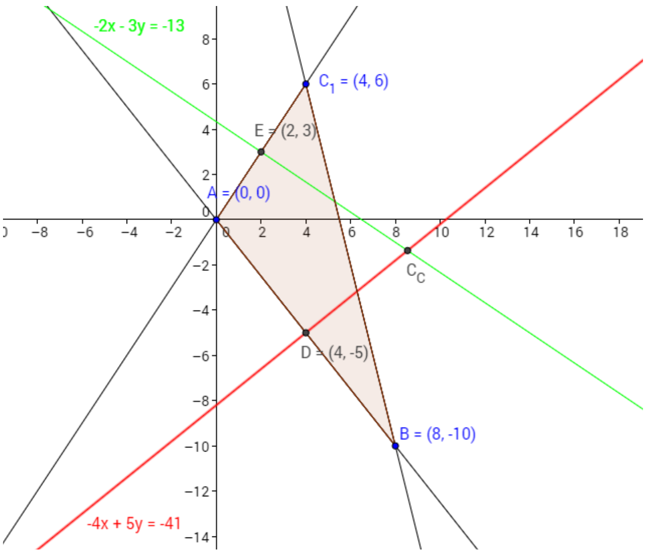
$$\frac{4x-41}{5}=\frac{-2x+13}{3} \rightarrow 12x-123=-10x+65 \rightarrow 22x=188 \rightarrow x=\frac{188}{22}=\frac{94}{11}$$

$$y=\frac{4x-41}{5} \rightarrow y=\frac{4\frac{94}{11}-41}{5} \rightarrow y=\frac{376-451}{55}=\frac{-75}{55}=\frac{-15}{11}$$

Por lo tanto el circuncentro tiene por coordenadas:

$$C_C=\left(\frac{94}{11},\frac{-15}{11}\right)$$

$Circuncentro\ \ C_c\ \ solución$



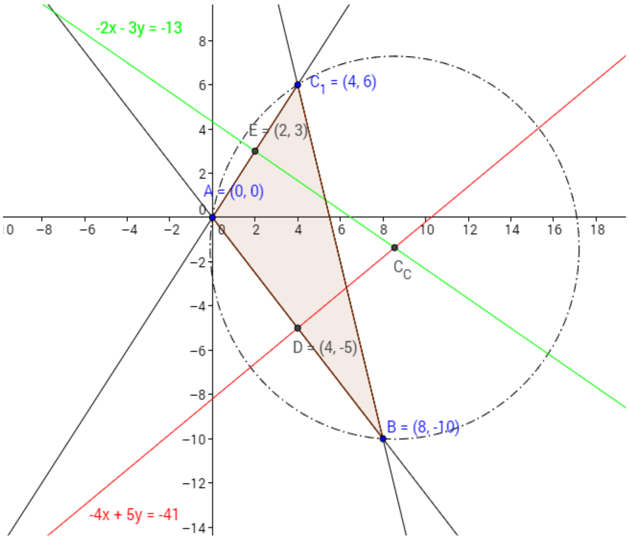
b) La circunferencia circunscrita está centrada en el circuncentro $C_C=\left(\frac{94}{11},\frac{-15}{11}\right)$. Y el radio es la distancia del circuncentro a uno de los vértices. Lo más sencillo es obtener la distancia del centro al vértice $A(0,0)$.

$$d(C_c, A)=r=\sqrt{\frac{9061}{121}}$$

Por lo tanto la ecuación de la circunferencia resulta:

$$\left(x-\frac{94}{11}\right)^2+\left(y+\frac{15}{11}\right)^2=\frac{9061}{121}$$

Circunferencia circunscrita



Hoja 12. Problema 2

2. Sea la recta $r: x+2y-a=0$ y la circunferencia $x^2+y^2=9$. Calcula el parámetro a para que:

a) La recta y la circunferencia sean secantes.

b) La recta y la circunferencia sean tangentes.

a) Si la recta es secante a la circunferencia, tendremos dos puntos de corte. Por lo tanto el siguiente sistema debe tener dos puntos solución:

$$\begin{Bmatrix} x+2y-a=0 \\ x^2+y^2=9 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} x=a-2y \\ x^2+y^2=9 \end{Bmatrix}$$

Resolvemos por sustitución:

$$(a-2y)^2+y^2=9 \rightarrow a^2+4y^2-4ay+y^2=9 \rightarrow 5y^2-4ay+a^2-9=0$$

Planteamos la soluciones de la ecuación de segundo grado:

$$y=\frac{4a\pm\sqrt{16a^2-20(a^2-9)}}{10}$$

Para que existan dos soluciones distintas, necesitamos que el discriminante de la raíz sea positivo. Por lo tanto:

$$16a^2-20(a^2-9)>0 \rightarrow -4a^2+180>0 \rightarrow \frac{180}{4}>a^2 \rightarrow 45>a^2$$

Y esta desigualdad implica que a pertenezca al siguiente intervalo:

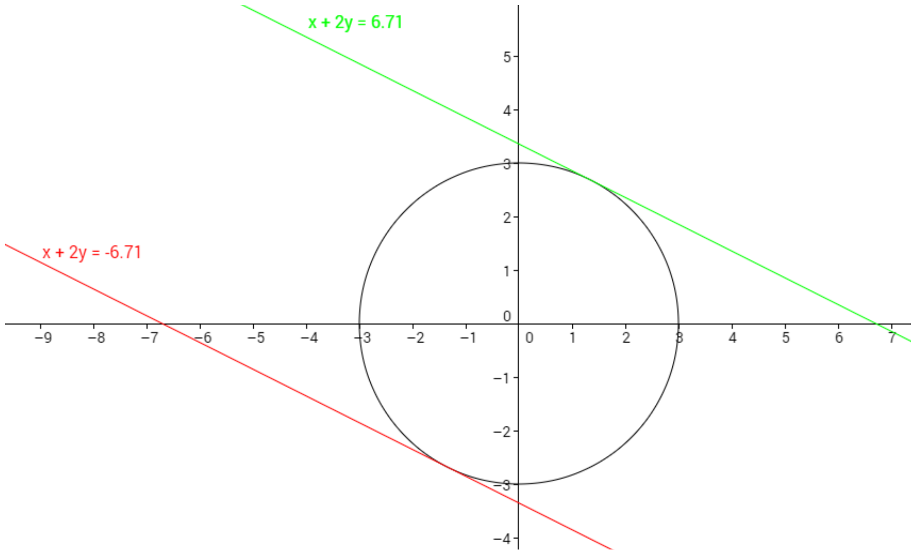
$$a\in[-\sqrt{45},+\sqrt{45}]$$

b) Para obtener una recta tangente, el planteamiento del apartado anterior sigue siendo válido pero imponiendo la condición de que el discriminante de la raíz sea igual a cero (para forzar así que la solución sea única).

Por lo tanto:

$$16a^2-20(a^2-9)=0 \quad \rightarrow \quad a=\pm\sqrt{45}$$

$$Las \quad rectas \quad r: x+2y+\sqrt{45}=0 \quad y \quad s: x+2y-\sqrt{45}=0 \quad tangentes \quad a \quad circunferencia \quad x^2+y^2=9$$



Hoja 12. Problema 3

3. Sean las circunferencias $x^2+y^2-4x-6y-23=0$ **y** $(x-6)^2+y^2+75+20y=0$ **.**

a) Obtener el centro y el radio de cada circunferencia.

b) Calcula la potencia del punto $P(2,0)$ **respecto ambas circunferencias. Según el signo de las potencias, indica la posición del punto** $P(2,0)$ **respecto cada circunferencia.**

a) Vamos a obtener el centro y el radio de cada circunferencia. La ecuación general será:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$$

Donde (x_0, y_0) es el centro de la circunferencia y r es el radio. Si desarrollamos los cuadrados y situamos todos los términos de la ecuación en el miembro de la izquierda:

$$x^2+x_0^2-2x_0x+y^2+y_0^2-2y_0y-r^2=0$$

Si comparamos con la ecuación de la primera circunferencia:

$$x^2+y^2-4x-6y-23=0$$

Identificamos las siguientes relaciones:

$$-2x_0=-4 \quad \rightarrow \quad x_0=2$$
$$-2y_0=-6 \quad \rightarrow \quad y_0=3$$
$$x_0^2+y_0^2-r^2=-23 \quad \rightarrow \quad 4+9-r^2=-23 \quad \rightarrow \quad r=6$$

Es decir, el centro de la primera circunferencia es $(2,3)$ y su radio 6 .

Para la segunda circunferencia vamos a expresar la ecuación general de la forma siguiente:

$$(x-x_0)^2+y^2+y_0^2-2y_0y-r^2=0$$

Y vamos a comparar esta expresión con la ecuación de la segunda circunferencia:

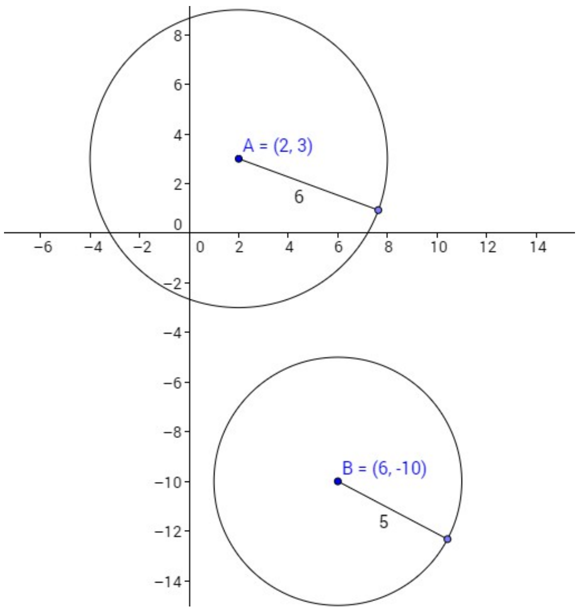
$$(x-6)^2+y^2+75+20y=0$$

Donde identificamos los siguientes términos:

$$x_0=6$$
$$-2y_0=20 \quad \rightarrow \quad y_0=-10$$
$$y_0^2-r^2=75 \quad \rightarrow \quad 100-r^2=75 \quad \rightarrow \quad r=5$$

Es decir, el centro de la segunda circunferencia es $(6,-10)$ y su radio 5 .

Representación gráfica de las circunferencias



b) Observando la representación gráfica anterior, comprobamos visualmente que el punto $P(2,0)$ es interior a la primer circunferencia y exterior a la segunda.

Por lo tanto, la potencia $POT(P)$ respecto a la primera circunferencia será negativa, y positiva respecto a la segunda. Comprobemos esto numéricamente.

$$POT(P)=d^2-r^2$$

Donde d es la distancia del punto P al centro de la circunferencia, y r es el radio.

Para la primera circunferencia:

$$d=\sqrt{(2-2)^2+(0-3)^2}=3 \quad \rightarrow \quad POT(P)=9-36=-27<0$$ → Punto interior

Para la segunda circunferencia:

$$d=\sqrt{(2-6)^2+(0+10)^2}=\sqrt{116} \quad \rightarrow \quad POT(P)=116-25=91>0$$ → Punto exterior

Hoja 12. Problema 4

4. Calcula la ecuación de la elipse que pasa por el punto $P(8,3)$, con centro el origen de coordenadas, focos en el eje de abscisas y eje menor igual a 10 . Represéntala gráficamente, indicando las coordenadas de los puntos A, A', B, B', F, F' de la elipse.

Según los datos del enunciado, tenemos una elipse de ejes coincidentes con los ejes cartesianos y focos sobre el eje OX.

$$2\mathrm{b}=10 \rightarrow b=5$$

$$O(0,0)\equiv centro$$

$$F(c,0) \quad , \quad F'(-c,0)$$

La ecuación de la elipse será:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{5^2}=1$$

Con $a\geq 5$ por ser a el semieje mayor.

El enunciado nos dice que la elipse pasa por el punto $P(8,3)$, por lo que sustituyendo en la ecuación de la elipse podemos obtener el valor de a .

$$P\in\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{5^2}=1 \rightarrow \frac{64}{a^2}+\frac{9}{25}=1 \rightarrow \frac{64}{a^2}=\frac{16}{25} \rightarrow a=10$$

El valor de la semidistancia focal c lo obtenemos de la relación general que cumplen los parámetros de la elipse.

$$a^2=b^2+c^2 \rightarrow 100=25+c^2 \rightarrow c=\sqrt{75}$$

Ya tenemos todos los datos para representar gráficamente la elipse y sus puntos más característicos.

$$\frac{x^2}{10^2}+\frac{y^2}{5^2}=1$$

La suma de distancias de P a F y a F' es el doble del eje mayor → $2a=20$