

Problemas – Tema 7

Solución a problemas de ampliación de los Temas 5 y 6 - Hoja 1 - Problemas 1, 2, 3, 5, 7, 8

Hoja 1. Problema 1

Resuelto por Juan Luís Pérez Valero (abril 2015)

1. Dado el segmento de extremos $A(-7,3)$ y $B(5,11)$, halla la ecuación de su mediatriz.

Primero calculamos la recta r que pasa por los extremos del segmento, sabiendo que un vector director de esa recta es:

$$\vec{AB} = (5+7, 11-3) = (12, 8)$$

La pendiente de la recta r es:

$$m_r = \frac{u_y}{u_x} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

Como tenemos la pendiente y un punto por el que pasa la recta r (en verdad tenemos dos puntos, A y B) podemos obtener la ecuación punto-pendiente:

$$m = \frac{(y - Y_0)}{(x - X_0)} \rightarrow r: \frac{2}{3} = \frac{y-3}{x+7} \rightarrow r: y = \frac{2}{3} \cdot x + \frac{23}{3}$$

La mediatriz s es perpendicular a la recta r , por lo que sus pendientes cumplen la relación:

$$m_s \cdot m_r = -1 \rightarrow m_s = \frac{-1}{2/3} = \frac{-3}{2}$$

Sabemos que la mediatriz s pasa por el punto medio del segmento.

$$P.M. \left(\frac{-7+5}{2}, \frac{3+11}{2} \right) = (-1, 7)$$

Tenemos la pendiente de la mediatriz s y un punto por el que pasa, así que expresamos la recta de la mediatriz en forma de ecuación punto-pendiente:

$$\frac{-3}{2} = \frac{y-7}{x+1}$$

Hoja 1. Problema 2

Resuelto por Andrés Fernández Ortega (abril 2015)

2. Halla la distancia del punto $P(1,0)$ a la recta $r: \frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 1$.

Por el punto P trazamos una perpendicular a la recta r . Para esto hallamos la pendiente m_r y, a partir de esta, la pendiente de su perpendicular m_s :

$$m_r = \frac{u_y}{u_x} \rightarrow m_r = \frac{-A}{B} \rightarrow m_r = \frac{-1}{\frac{1}{4}} = \frac{-4}{1} = -4$$

La pendiente de la perpendicular será inversa y opuesta:

$$m_s = \frac{3}{2}$$

Teniendo la pendiente de la recta perpendicular s y un punto $P(1,0)$, se puede expresar la recta en la ecuación punto-pendiente:

$$s: \frac{3}{2} = \frac{y}{x-1}$$

Ahora se pasan ambas ecuaciones a forma explícita y hacemos un sistema para hallar el punto de corte Q de ambas rectas:

$$\begin{cases} s: y = \frac{3x-3}{2} \\ r: y = \frac{-2x+12}{3} \end{cases}$$

Por igualación:

$$\frac{3x-3}{2} = \frac{-2x+12}{3} \rightarrow x = \frac{33}{13} \rightarrow y = \frac{3 \cdot \frac{33}{13} - 3}{2} = \frac{30}{13} \rightarrow \text{Punto intersección: } Q\left(\frac{33}{13}, \frac{30}{13}\right)$$

Con este punto de intersección $Q\left(\frac{33}{13}, \frac{30}{13}\right)$ y el punto $P(1,0)$, hallamos el módulo del vector que va de un punto a otro y esa será la distancia del punto P a la recta r .

$$\vec{PQ} = \left(\frac{33}{13} - 1, \frac{30}{13}\right) = \left(\frac{20}{13}, \frac{30}{13}\right)$$

$$d(P, r) = |\vec{PQ}| = \sqrt{\frac{400+900}{13^2}} = \sqrt{\frac{1300}{13^2}} = \sqrt{\frac{100 \cdot 13}{13^2}} = \frac{10}{\sqrt{13}} = \frac{10\sqrt{13}}{13}$$

Esta distancia podríamos haberla obtenido directamente aplicando el resultado general demostrado en la teoría de clase. Para una recta $r: Ax + By + C = 0$ y un punto externo a la recta $P(x_0, y_0)$, la distancia del punto a la recta se obtiene de:

$$d(P, r) = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$

Aplicado a nuestro problema con $r: \frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 1$ y $P(1,0)$, resulta:

$$d(P, r) = \left| \frac{\frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 0 - 1}{\sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2}} \right| = \frac{10\sqrt{13}}{13}$$

Hoja 1. Problema 3

Resuelto por Clara Meca (abril 2015)

3. Halla el punto simétrico de $A(1,1)$ respecto de la recta $r: x-3y-12=0$.

Buscamos un punto $B(x, y)$ que se encuentre a la misma distancia de la recta r a la que se encuentra el punto $A(1,1)$. De tal forma que ambos puntos estén unidos por una recta perpendicular a r .

Así, el punto $B(x, y)$ será el simétrico de $A(1,1)$ respecto al eje de simetría formado por la recta r .

La recta $r: x-3y-12=0$ tiene por vector director $\vec{u}_r = (-B, A) = (3, 1) \rightarrow m_r = \frac{1}{3}$.

Por lo tanto, una recta s perpendicular a r tendrá por pendiente $m_s = -3$.

Puede trazar la recta s que pasa por $A(1,1)$ y es perpendicular a r .

$$s: -3 = \frac{y-1}{x-1} \rightarrow s: 3x + y - 4 = 0$$

Esta recta s corta a r en un punto C , que será el punto medio del segmento formado por los puntos $A(1,1)$ y $B(x, y)$.

Para obtener C resolvemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} r: x-3y-12=0 \\ s: 3x+y-4=0 \end{cases}$$

Para resolver multiplicamos la primera ecuación por 3.

$$\begin{cases} 3x-9y-36=0 \\ 3x+y-4=0 \end{cases}$$

Restamos ambas ecuaciones.

$$-10y - 32 = 0 \rightarrow y = \frac{-16}{5} \rightarrow x = \frac{12}{5} \rightarrow C\left(\frac{12}{5}, \frac{-16}{5}\right)$$

Si $C\left(\frac{12}{5}, \frac{-16}{5}\right)$ es el punto medio del segmento de extremos $A(1,1)$ y $B(x,y)$:

$$\left(\frac{12}{5}, \frac{-16}{5}\right) = \left(\frac{x+1}{2}, \frac{y+1}{2}\right)$$

Igualando componente a componente:

$$\frac{12}{5} = \frac{x+1}{2} \rightarrow x = \frac{19}{5}$$

$$\frac{-16}{5} = \frac{y+1}{2} \rightarrow y = \frac{-37}{5}$$

Por lo tanto el punto simétrico buscado es:

$$B\left(\frac{19}{5}, \frac{-37}{5}\right)$$

Hoja 1. Problema 5

Resuelto por María Mundi (abril 2015)

5. Halla la distancia del origen de coordenadas a la recta $r: 3x - 4y + 10 = 0$.

Utilizamos la fórmula de la distancia de una recta al origen de coordenadas:

$$d(O, r) = \left| \frac{-C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| = \left| \frac{-10}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \right| = 2$$

Hoja 1. Problema 7

Resuelto por Inés Delgado (abril 2015)

7. Dada la recta $r: x-2y=0$ y los puntos $A(0,3)$ y $B(-1,5)$. Halla los extremos del segmento simétrico al \vec{AB} respecto de la recta.

Buscamos la recta perpendicular a r que pase por el punto $A(0,3)$, y que llamaremos s . Para ello, calculamos la pendiente de la recta r .

$$m_r = \frac{-A}{B} = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto $\rightarrow m_s = -2$

Aplicamos la ecuación punto-pendiente para la recta s .

$$m = \frac{y-y_0}{x-x_0} \rightarrow s: -2x = y-3 \rightarrow s: 2x+y-3=0$$

Calculamos el punto de corte entre las rectas r y s , resolviendo el siguiente sistema:

$$\begin{cases} r: x-2y=0 \\ s: 2x+y-3=0 \end{cases} \rightarrow (x,y) = \left(\frac{6}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

Este punto de corte $(x,y) = \left(\frac{6}{5}, \frac{3}{5}\right)$ es el punto medio del segmento $\overline{AA'}$, siendo A' el punto simétrico de A respecto de la recta r . Por lo tanto podemos obtener A' :

$$\left(\frac{6}{5}, \frac{3}{5}\right) = \left(\frac{x+0}{2}, \frac{y+3}{2}\right) \rightarrow A' \left(\frac{12}{5}, \frac{-9}{5}\right)$$

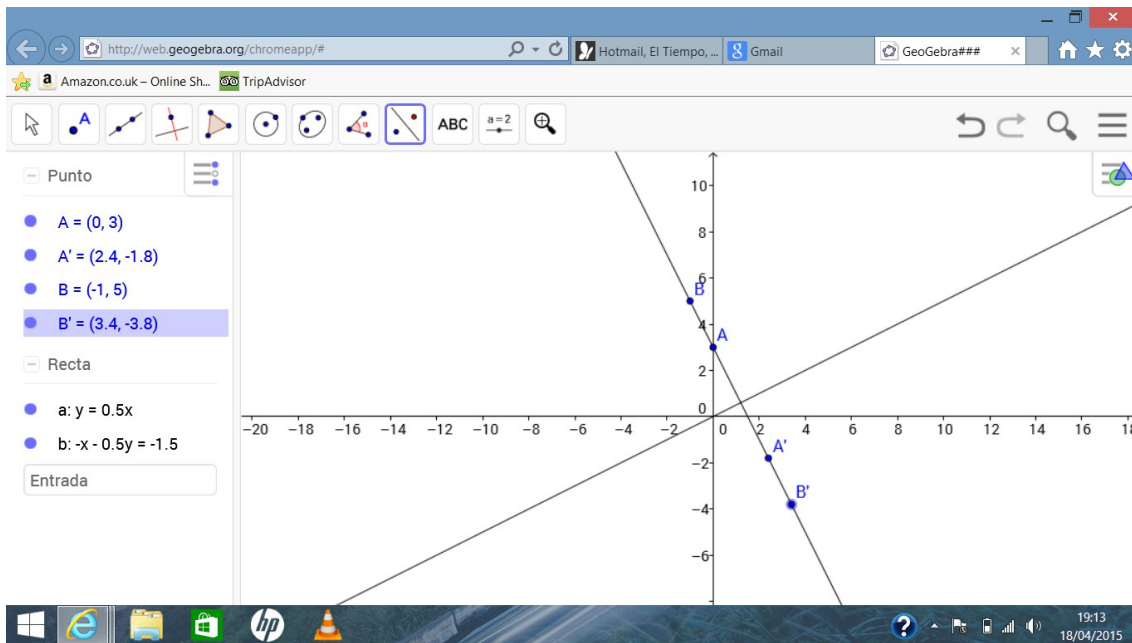
Para obtener el punto B' simétrico a $B(-1,5)$, comprobamos que la recta s anteriormente calculada también pasa por el punto B . Es decir:

$$s: 2x + y - 3 = 0 \rightarrow B(-1, 5) \in s$$

Por lo tanto, el punto $(x, y) = \left(\frac{6}{5}, \frac{3}{5}\right)$ también cumple que es el punto medio del segmento $\overline{BB'}$. Es decir:

$$\left(\frac{6}{5}, \frac{3}{5}\right) = \left(\frac{x-1}{2}, \frac{y+5}{2}\right) \rightarrow B'\left(\frac{17}{5}, -\frac{19}{5}\right)$$

La siguiente gráfica muestra la solución del problema.



Hoja 1. Problema 8

Resuelto por José M^a Soto (abril 2015)

8. Calcula la distancia entre las rectas $r:3x-4y+5=0$ **y** $s:3x-4y-15=0$

Ambas rectas son paralelas, al compartir los términos A y B en sus ecuaciones generales.

Utilizamos la fórmula obtenida en clase para la distancia entre dos rectas paralelas.

$$d(r,s)=\left|\frac{C-C'}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|=\left|\frac{5+15}{\sqrt{3^2+4^2}}\right|=4$$