Teoría – Tema 7

Elipse

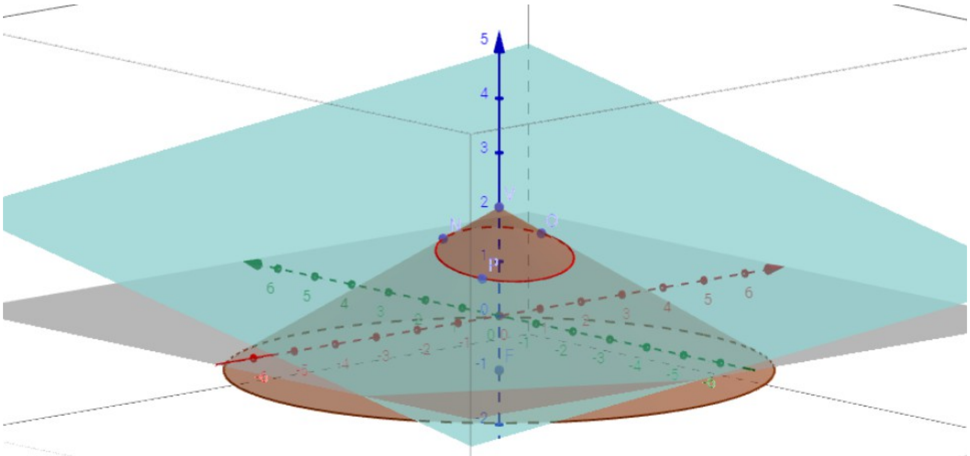
Índice de contenido

La elipse como superficie cónica

Si el cono de revolución de vértice V es intersectado por un plano secante que corta a todas las generatrices g , el resultado es una elipse.

La circunferencia, que ya hemos estudiado, es un caso particular de elipse donde el plano secante es perpendicular al eje e .

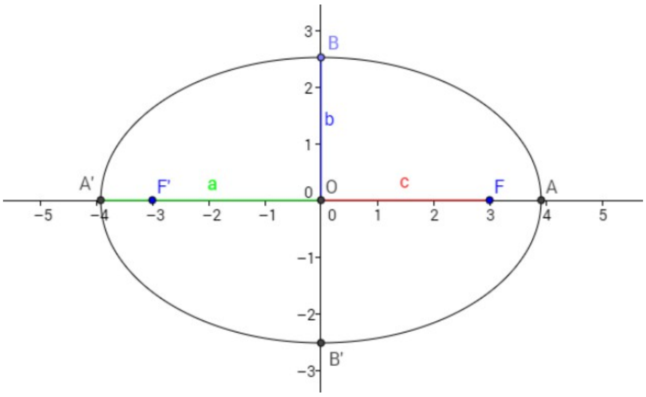
Elipses obtenidas por el corte de planos sobre el cono



La elipse como lugar geométrico

La elipse es **el lugar geométrico de los puntos del plano** $P(x,y)$ **cuya suma de distancia a dos puntos fijos, llamados focos, es constante**.

$$Elipse \ \ de \ \ centro \ \ O(0,0) \ \ y \ \ vértices \ \ sobre \ \ los \ \ ejes \ \ coordenados$$



La **distancia focal** $2c$ es la distancia entre los focos F y F' .

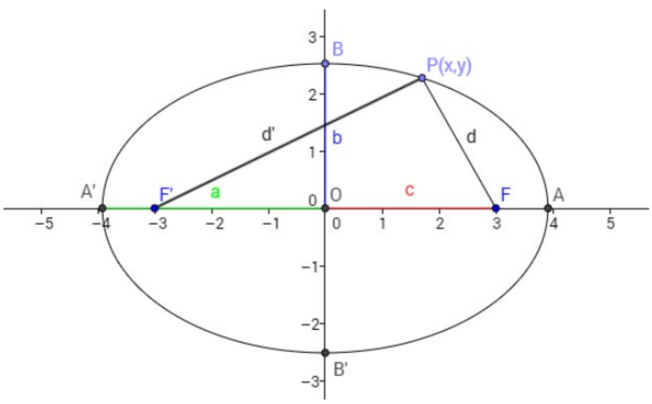
El **eje mayor** $2a$ es la longitud del segmento $\overline{AA'}$ formado por el corte de la elipse con la recta que pasa por los focos. Los puntos A y A' son los vértices del eje mayor.

El **eje menor** $2b$ es la longitud del segmento $\overline{BB'}$ formado por el corte de la elipse con la mediatriz del eje mayor. Los puntos B y B' son los vértices del eje menor.

El **centro** (x_0, y_0) es el punto de corte del eje mayor con el eje menor. Si el centro coincide con el origen de coordenadas $(x_0, y_0)=(0,0)$. Y si, además, los ejes de la elipse coinciden con los ejes coordenados, los vértices A , A' , B y B' se sitúan sobre los propios ejes OX y OY .

Los **radios vectores** son los segmentos que unen $P(x,y)$ con los focos F y F' .

$$P(x,y) \ \ pertenece \ \ a \ \ la \ \ elipse \ \ por \ \ lo \ \ que \ \ la \ \ suma \ \ d \ + \ d' \ \ es \ \ constante$$

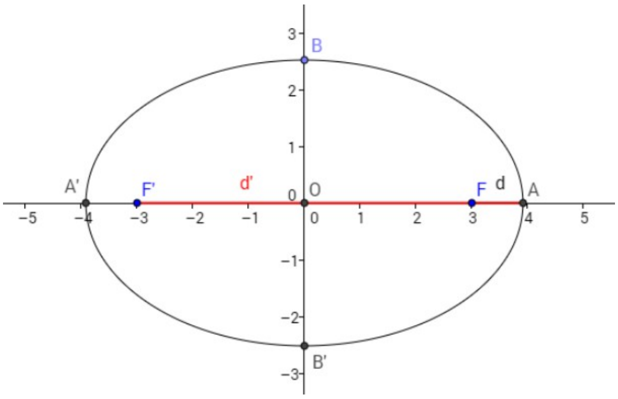


Sea $P(x,y)$ un punto de la elipse. Por definición, la suma de sus distancias a los focos debe ser constante.

$$d+d'=constante$$

Como $P(x,y)$ es un punto arbitrario de la elipse podemos tomar, por ejemplo, el vértice A. En el vértice A se cumple también la relación $d+d'=constante$.

El vértice A pertenece a la elipse por lo que la suma $d+d'$ es constante



Tomando A como punto de la elipse, y recordando que $2c$ es la distancia focal y $2a$ la longitud del eje mayor:

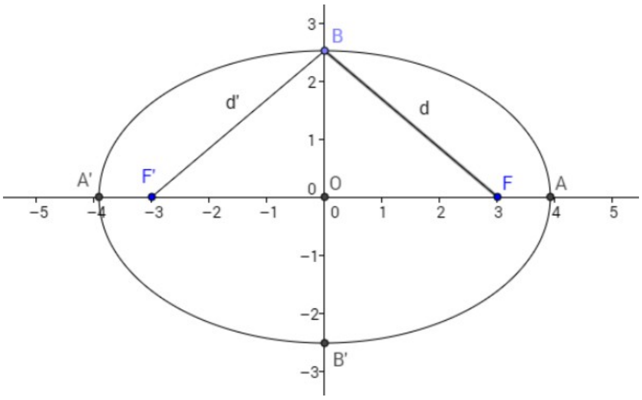
$$d=\overline{AF} \rightarrow d=\overline{AO}-\overline{FO}=a-c$$
$$d'=\overline{AF'} \rightarrow d'=\overline{AO}+\overline{F'O}=a+c$$

Por lo tanto:

Si $P(x,y)$ pertenece a la elipse, la suma de distancias a los focos es constante e igual a la longitud del eje mayor.
$$d+d'=2a$$

Vamos a repetir el razonamiento tomando ahora el vértice B, que por pertenecer a la elipse cumple también la relación $d+d'=constante$.

El vértice B pertenece a la elipse por lo que la suma d + d' es constante



Tomando B como punto de la elipse, y recordando que $2c$ es la distancia focal, $2a$ la longitud del eje mayor y $2b$ la longitud del eje menor:

$d+d'=2a$

En $B \rightarrow d=d' \rightarrow d=a$

Además, en el triángulo rectángulo BOF de la imagen superior se cumple la relación de Pitágoras $d^2=b^2+c^2$. Y como $d=a$, nos queda:

Relación fundamental entre los parámetros de una elipse

$a^2=b^2+c^2$

Ecuación de la elipse con centro el origen de coordenadas, ejes sobre los cartesianos y focos sobre eje OX

Sea $P(x,y)$ un punto genérico de la elipse, con centro en $O(0,0)$ y focos $F(c,0)$ y $F'(-c,0)$. Las distancias de P a los focos serán:

$$d=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$
$$d'=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

Por definición de elipse:

$$d+d'=2a \rightarrow \sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a \rightarrow \sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

Elevamos ambos miembros al cuadrado.

$$x^2-2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+x^2+c^2+2cx+y^2$$
$$4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=4a^2+4cx \rightarrow a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2+cx$$

Elevamos nuevamente al cuadrado ambos miembros.

$$a^2(x^2+2cx+c^2+y^2)=a^4+c^2x^2+2a^2cx$$
$$a^2x^2-cx^2+a^2y^2=a^4-a^2c^2 \rightarrow (a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

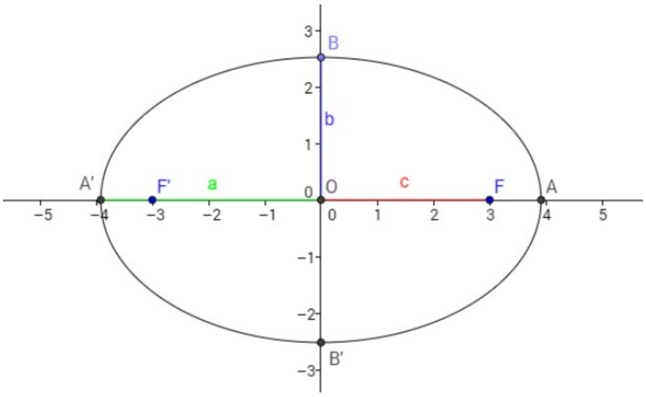
De la relación fundamental de la elipse sabemos que $a^2=b^2+c^2 \rightarrow a^2-c^2=b^2$. Sustituimos:

$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ → Dividimos todo por el factor a^2b^2

Ecuación de la elipse centrada en el origen de coordenadas, ejes sobre los cartesianos y focos sobre el eje OX.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Elipse de ecuación $\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{5}{2}\right)^2}=1$ *con focos* $F(3,0)$ *y* $F'(-3,0)$



Los focos F y F' siempre se encuentran sobre el eje mayor de la elipse.

Por definición, siempre se cumple $a \geq b$. En el caso extremo $a=b$, tendremos una circunferencia.

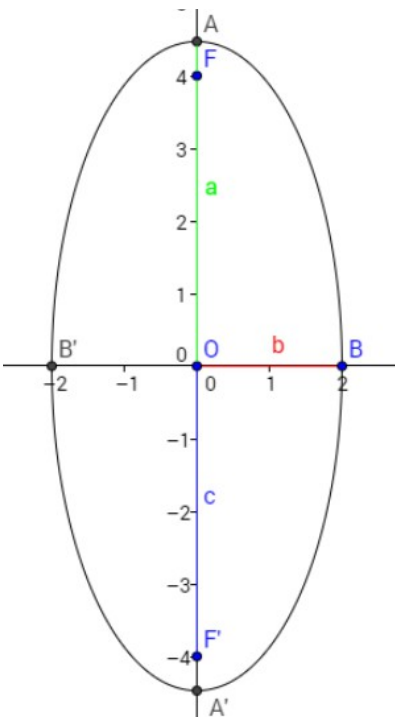
Ecuación de la elipse con centro el origen de coordenadas, ejes sobre los cartesianos y focos sobre eje OY

Sea $P(x,y)$ un punto genérico de la elipse, con centro en $O(0,0)$ y focos $F(0,c)$ y $F'(0,-c)$. Siguiendo un razonamiento análogo al apartado anterior:

Ecuación de la elipse centrada en el origen de coordenadas, ejes sobre los cartesianos y focos sobre el eje OY.

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

Elipse de ecuación $\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{9}{2}\right)^2}=1$ *con focos* $F(0,2)$ *y* $F'(0,-2)$



Ecuación de la elipse con centro distinto al origen de coordenadas, ejes paralelos a los cartesianos y focos en eje paralelo a OX

Sea $P(x,y)$ un punto genérico de la elipse, con centro en (x_0, y_0) y focos $F(x_0+c, y_0)$ y $F'(x_0-c, y_0)$. Las distancias de P a los focos serán:

$$d=\sqrt{(x-(x_0+c))^2+(y-y_0)^2}$$
$$d'=\sqrt{(x-(x_0-c))^2+(y-y_0)^2}$$

Por definición de elipse:

$$d+d'=2a \quad \rightarrow \quad \sqrt{(x-(x_0+c))^2+(y-y_0)^2}+\sqrt{(x-(x_0-c))^2+(y-y_0)^2}=2a$$
$$\sqrt{(x-(x_0+c))^2+(y-y_0)^2}=2a-\sqrt{(x-(x_0-c))^2+(y-y_0)^2}$$

Elevamos al cuadrado... con mucha paciencia!!
El término de la izquierda queda:

$$x^2-2xx_0-2cx+2cx_0+x_0^2+c^2+y^2+y_0^2-2yy_0$$

Y el término de la derecha queda:

$$4a^2-4a\sqrt{(x-(x_0-c))^2+(y-y_0)^2}+x^2-2\text{x}x_0+2cx-2cx_0+c^2+x_0^2+y^2+y_0^2-2yy_0$$

Igualamos ambos términos y eliminamos lo que cancela.

$$4a\sqrt{(x-(x_0-c))^2+(y-y_0)^2}=4\text{a}^2+4cx-4cx_0 \quad \rightarrow \quad a\sqrt{(x-(x_0-c))^2+(y-y_0)^2}=a^2+cx-cx_0$$

Volvemos a elevar al cuadrado... ¿Quién dijo miedo?
El término de la izquierda queda:

$$a^2(x^2-2xx_0+2cx-2cx_0+c^2+x_0^2)+y^2+y_0^2-2yy_0$$

Y el término de la derecha:

$$a^4+2a^2cx-2a^2cx_0+c^2x^2-2c^2xx_0+c^2x_0^2$$

Igualando ambos términos, eliminando lo que cancela y sacando factor común:

$$x^2(a^2-c^2)+x_0^2(a^2-c^2)+a^2(y^2+y_0^2-2yy_0)=a^4-a^2c^2+2a^2xx_0-2c^2xx_0$$

$$x^2(a^2-c^2)+x_0^2(a^2-c^2)+a^2(y-y_0)^2=a^2(a^2-c^2)+2xx_0(a^2-c^2)$$

De la relación fundamental de la elipse $a^2-c^2=b^2$. Sustituimos.

$$x^2b^2+x_0^2b^2+a^2(y-y_0)^2=a^2b^2+2xx_0b^2$$

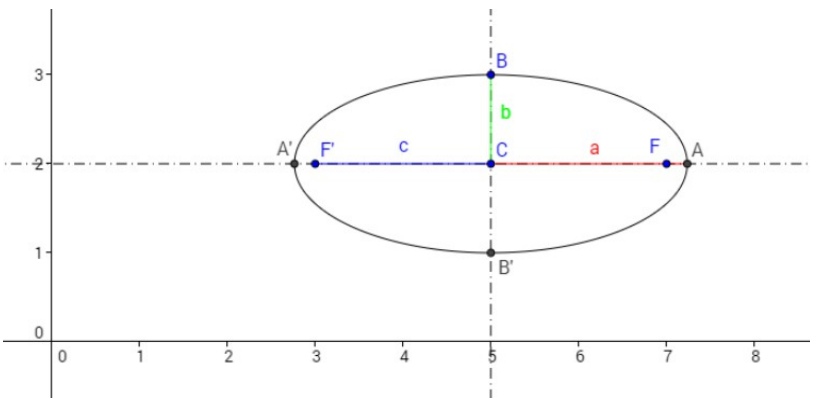
$$b^2(x^2+x_0^2-2xx_0)+a^2(y-y_0)^2=a^2b^2$$

$b^2(x-x_0)^2+a^2(y-y_0)^2=a^2b^2$ → Dividimos cada término por el factor a^2b^2

Ecuación de la elipse centrada en (x_0, y_0) , ejes paralelos a los cartesianos y focos sobre el eje paralelo al eje OX.

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

Elipse de ecuación $\frac{(x-5)^2}{(2{,}24)^2}+\frac{(y-2)^2}{(1)^2}=1$ *con focos* $F(7{,}2)$ *y* $F'(3{,}2)$



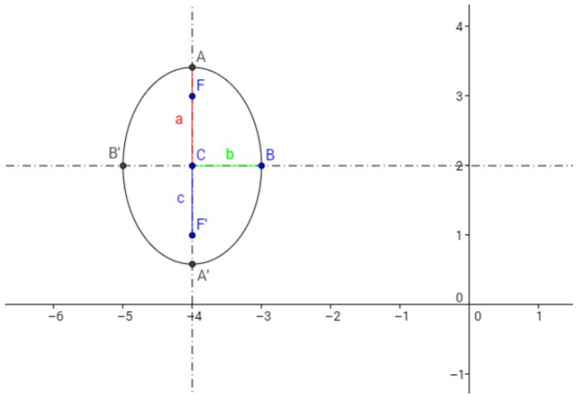
Ecuación de la elipse con centro distinto al origen de coordenadas, ejes paralelos a los cartesianos y focos en eje paralelo a OY

Sea $P(x,y)$ un punto genérico de la elipse, con centro en (x_0, y_0) y focos $F(x_{0,}\, y_0+c)$ y $F'(x_{0,}\, y_0-c)$. Siguiendo un razonamiento semejante al del apartado anterior:

Ecuación de la elipse centrada en $(x_{0,}\, y_0)$, ejes paralelos a los cartesianos y focos sobre el eje paralelo al eje OY.

$$\frac{(x-x_0)^2}{b^2}+\frac{(y-y_0)^2}{a^2}=1$$

Elipse de ecuación $\frac{(x+4)^2}{(1)^2}+\frac{(y-2)^2}{(1{,}41)^2}=1$ *con focos* $F(-4{,}3)$ *y* $F'(-4{,}1)$



Excentricidad

La excentricidad, denotada como e , es un parámetro que incida el menor o mayor achatamiento de la elipse.

$$e=\frac{c}{a} \quad \rightarrow \quad 0\leq e\leq 1$$

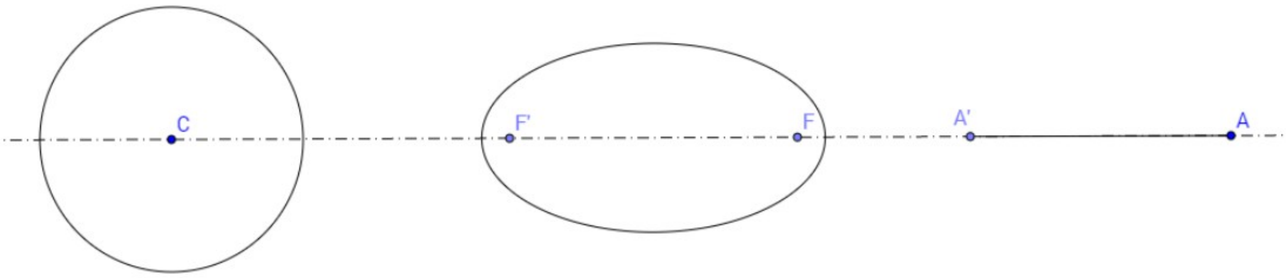
Si $c=0 \rightarrow e=0$ → La distancia focal es nula → Estamos ante una circunferencia (elipse sin achatar).

Si $c=a \rightarrow e=1$ → Los focos coinciden con los vértices A y A' → Estamos ante un segmento (elipse achatada al máximo).

A mayor excentricidad, mayor achatamiento de la elipse.

$$A \ \ mayor \ \ excentricidad \ \ mayor \ \ achatamiento$$

$$e_{circunferencia}=0, \quad 0\leq e_{elipse}\leq 1, \quad e_{segmento}=1$$

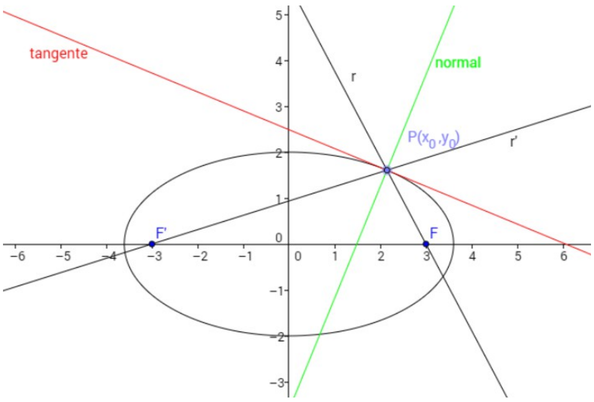


Tangente a una elipse por un punto

Vamos a distinguir dos casos: Si el punto pertenece o no a la elipse.

Si el punto $P(x_0, y_0)$ pertenece a la elipse, las rectas tangente y normal (perpendicular a la tangente) a la elipse por el punto son las **dos bisectrices de los ángulos que forman las prolongaciones de los radio vectores de ese punto** (recuerda que los radio vectores son los segmentos que unen $P(x_0, y_0)$ con los focos F y F').

Rectas tangente y normal a una elipse por un punto perteneciente a ella



Si el punto $P(x_0, y_0)$ no pertenece a la elipse, de todas las posibles rectas que pasan por P , solo dos lo harán de forma tangente a la elipse. Por lo tanto, **del siguiente sistema de ecuaciones necesitamos dos valores de la pendiente m que fuercen a que la solución sea única** (tomamos como ejemplo la ecuación de la elipse centrada en el origen de coordenadas y con focos sobre el eje OX):

$$\left\{ \begin{array}{l} m = \dfrac{y - y_0}{x - x_0} \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \end{array} \right\}$$ → Sistema formado por la ecuación de la recta y la ecuación de la elipse

Al resolver el sistema, obtendremos una ecuación de segundo grado en la variable x (o en la variable y , da igual con cual operemos). Y haremos 0 el valor del discriminante (contenido de la raíz) que se genera al resolver la variable, lo cual nos llevará a una condición para el parámetro m que ofrece las soluciones deseadas.