

Teoría – Tema 7

Circunferencia

Índice de contenido

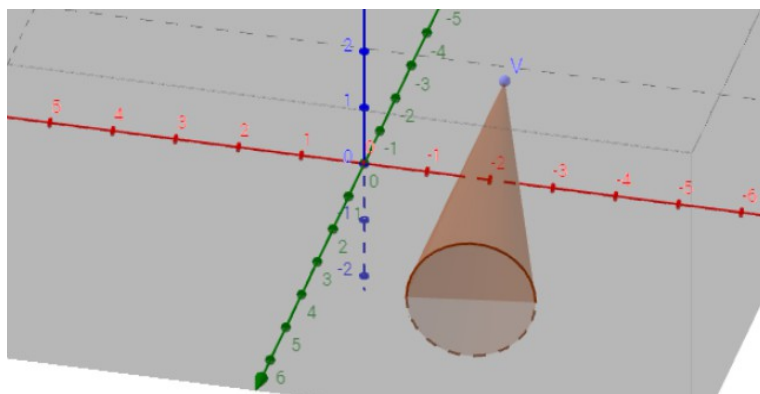
La circunferencia como superficie cónica.....	2
La circunferencia como lugar geométrico.....	3
Potencia de un punto respecto de una circunferencia.....	4
Recta tangente a una circunferencia.....	7

La circunferencia como superficie cónica

Un cono de revolución se engendra por el giro de una recta generatriz g alrededor de otra recta e llamada eje, con la cual se corta en un punto V llamado vértice.

Si este cono de revolución es cortado por un plano perpendicular al eje e , tendremos una circunferencia.

Sección sobre cono de revolución que genera circunferencia



La circunferencia como lugar geométrico

La circunferencia es el **lugar geométrico de los puntos del plano** $P(x, y)$ **cuya distancia a un punto fijo, llamado centro, es constante.**

La distancia constante que separa el centro de cualquier punto de la circunferencia es el radio r .

Sea $C(x_0, y_0)$ el centro de la circunferencia y $P(x, y)$ un punto genérico del plano. La distancia del punto $C(x_0, y_0)$ al punto $P(x, y)$ se define como:

$$d(C, P) = r$$

Y de la ecuación que mide la distancia entre dos puntos:

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = r$$

Ecuación de la circunferencia de centro $C(x_0, y_0)$ y radio r

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2 \rightarrow \text{Si el centro es } (0,0) \rightarrow x^2 + y^2 = r^2$$

Desarrollando la expresión general de la circunferencia.

$$x^2 + x_0^2 - 2 \cdot x \cdot x_0 + y^2 + y_0^2 - 2 \cdot y \cdot y_0 = r^2$$

$$x^2 + y^2 - 2 \cdot x \cdot x_0 - 2 \cdot y \cdot y_0 + x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 0$$

Llamando:

$$m = -2x_0$$

$$n = -2y_0$$

$$p = x_0^2 + y_0^2 - r^2$$

Obtenemos la ecuación desarrollada de la circunferencia

$$x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$$

Desde la ecuación desarrollada podemos hallar las coordenadas del centro y el valor del radio.

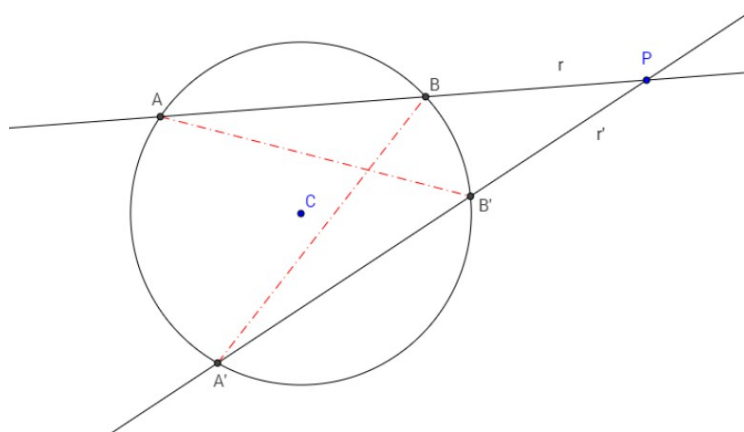
$$\text{Centro } C = \left(\frac{-m}{2}, \frac{-n}{2} \right)$$

$$\text{Radio } r = \sqrt{\frac{m^2}{4} + \frac{n^2}{4} - p}$$

Potencia de un punto respecto de una circunferencia

Sea la circunferencia de centro $C(x_0, y_0)$ y un punto exterior $P(x_1, y_1)$. Desde P trazamos dos rectas secantes a la circunferencia, r y r' , que la cortarán respectivamente en los puntos A y B , A' y B' .

Los triángulos PBA' y $PB'A$ son semejantes, ya que tienen un ángulo común P , y dos ángulos iguales en los vértices A y A' por ser inscritos en la circunferencia en la que abarcan el mismo arco BB' .



Entonces se cumplirá:

$$\frac{\overline{PA'}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{PB'}} \rightarrow \overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PA'} \cdot \overline{PB'}$$

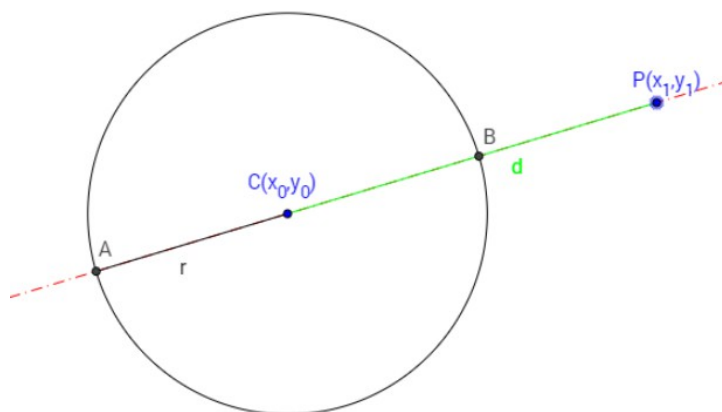
Este producto se mantiene constante para cualquier secante que corte a la circunferencia y pase por el punto externo P , y se llama potencia del punto P respecto de la circunferencia.

$$Pot(P) = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$$

Si de todas las secantes que pasan por P , tomamos la que pasa por el centro, tendremos:

$$Pot(P) = (d+r)(d-r) \rightarrow d \text{ es la distancia del punto } P \text{ al centro de la circunferencia.}$$

Circunferencia de radio r . Distancia de P al centro es d



Por lo tanto:

$$Pot(P) = (d+r)(d-r) = d^2 - r^2$$

$d \equiv$ distancia del punto $P(x_1, y_1)$ al centro de la circunferencia $C(x_0, y_0)$

$r \equiv$ radio de la circunferencia

La distancia entre $P(x_1, y_1)$ y $C(x_0, y_0)$ será $d(P, C) = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$, por lo que la potencia queda:

Potencia del punto $P(x_1, y_1)$ respecto de la circunferencia de centro $C(x_0, y_0)$ y radio r

$$Pot(P) = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 - r^2$$

Si recordamos la notación seguida en la ecuación desarrollada de la circunferencia:

$$m = -2x_0, \quad n = -2y_0, \quad p = x_0^2 + y_0^2 - r^2$$

$$Pot(P) = x_1^2 + y_1^2 + m x_1 + n y_1 + p$$

Con el valor de la potencia podemos determinar la posición relativa del punto $P(x_1, y_1)$ respecto la circunferencia.

Si $Pot(P) > 0 \rightarrow d^2 - r^2 > 0 \rightarrow d > r \rightarrow$ Punto exterior a la circunferencia

Si $Pot(P) = 0 \rightarrow d^2 - r^2 = 0 \rightarrow d = r \rightarrow$ Punto perteneciente a la circunferencia

Si $Pot(P) < 0 \rightarrow d^2 - r^2 < 0 \rightarrow d < r \rightarrow$ Punto interior a la circunferencia

Si de todas las rectas secantes trazadas desde el punto exterior $P(x_1, y_1)$ elegimos una

de las dos tangentes del punto a la circunferencia, los puntos de corte $A=B$ coinciden por ser tangente:

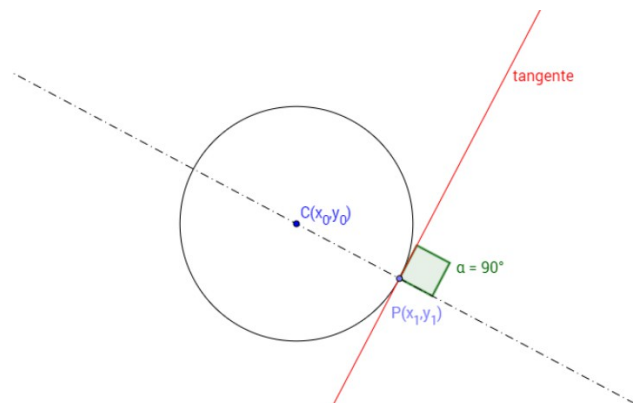
$$Pot(P) = \overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PA} \cdot \overline{PA} = (\overline{PA})^2 \rightarrow \overline{PA} = \sqrt{Pot(P)}$$

Es decir, la distancia de un punto P al punto de tangencia sobre la circunferencia de la recta tangente trazada por él, es la raíz cuadrada de la potencia del punto.

Recta tangente a una circunferencia

Si el punto $P(x_1, y_1)$ pertenece a la circunferencia de centro $C(x_0, y_0)$, podemos obtener fácilmente la ecuación de la recta tangente a la circunferencia por ese punto sabiendo que la recta tangente es perpendicular a la recta que une $P(x_1, y_1)$ con $C(x_0, y_0)$.

La recta tangente a la circunferencia es normal a la prolongación del diámetro



Si el punto $P(x_1, y_1)$ es exterior a la circunferencia, habrá dos rectas tangentes a la circunferencia que pasen por $P(x_1, y_1)$.

Una forma de obtener las ecuaciones de estas dos rectas tangentes es la siguiente. Sabemos que la distancia del punto externo $P(x_1, y_1)$ a los puntos de tangencia A y B es igual a la raíz de la potencia: $\overline{PA} = \overline{PB} = \sqrt{Pot(P)}$.

Estos puntos de tangencia A y B distan del centro $C(x_0, y_0)$ una distancia igual al radio de la circunferencia r .

Imponiendo estas condiciones, llegaremos a un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, cuyas soluciones son las coordenadas de los puntos A y B .

Y una vez obtenidos los puntos de tangencia, podemos obtener las ecuaciones de las rectas tangentes a la circunferencia que pasarán por P y A , y por P y B respectivamente.

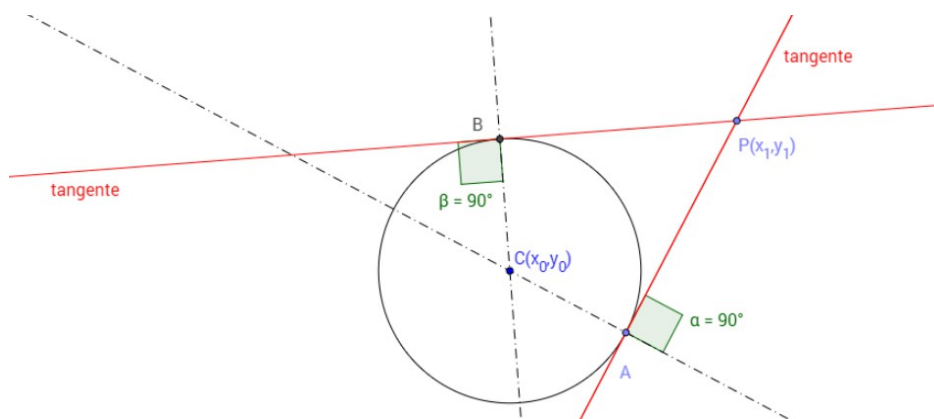
Un segundo método si el punto $P(x_1, y_1)$ no pertenece a la circunferencia es tomar, de todas las posibles rectas que pasan por P , solo las dos rectas que son tangentes a la circunferencia.

Por lo tanto, del siguiente sistema de ecuaciones necesitamos dos valores de la pendiente m que fuercen a que la solución sea única (tomamos como ejemplo la ecuación de la circunferencia centrada en el origen de coordenadas):

$$\left\{ \begin{array}{l} m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \text{Sistema formado por ecuación de la recta y ecuación de circunferencia}$$

Al resolver el sistema, obtendremos una ecuación de segundo grado en la variable x (o en la variable y , da igual con cual operemos). Y haremos 0 el valor del discriminante (contenido de la raíz) que se genera al resolver la variable, lo cual nos llevará a una condición para el parámetro m que ofrecerá las soluciones deseadas.

Rectas tangente a la circunferencia desde un punto exterior $P(x_1, y_1)$



Ejemplo

Obtener las ecuaciones generales de las dos rectas tangentes a la circunferencia centrada en el origen de coordenadas y radio 2 unidades, desde el punto exterior $P(0,7)$.

Ecuación de la circunferencia $\rightarrow x^2 + y^2 = 2^2$

Ecuación del haz de rectas que pasan por $P(0,7) \rightarrow m = \frac{y-7}{x-0}$

Con ambas ecuaciones planteamos un sistema de ecuaciones. Si despejamos de la recta $y = mx + 7$ y llevamos este valor a la ecuación de la circunferencia:

$$x^2 + (mx + 7)^2 = 4 \rightarrow (1 + m^2)x^2 + 14mx + 45 = 0 \rightarrow x = \frac{-14m \pm \sqrt{(14m)^2 - 4 \cdot (1 + m^2) \cdot 45}}{2(1 + m^2)}$$

Para que el sistema tenga solución única para cada recta tangente:

$$(14m)^2 - 4 \cdot (1 + m^2) \cdot 45 = 0 \rightarrow 16m^2 - 180 = 0 \rightarrow m = \frac{\pm \sqrt{45}}{2}$$

Una vez obtenidas las pendientes de las rectas tangentes, podemos obtener sus ecuaciones generales.

$$m = \frac{\sqrt{45}}{2} \rightarrow \frac{\sqrt{45}}{2} = \frac{y-7}{x-0} \rightarrow \frac{\sqrt{45}}{2}x - y + 7 = 0$$

$$m = \frac{-\sqrt{45}}{2} \rightarrow \frac{-\sqrt{45}}{2} = \frac{y-7}{x-0} \rightarrow \frac{\sqrt{45}}{2}x + y - 7 = 0$$