Teoría – Tema 7

Circunferencia

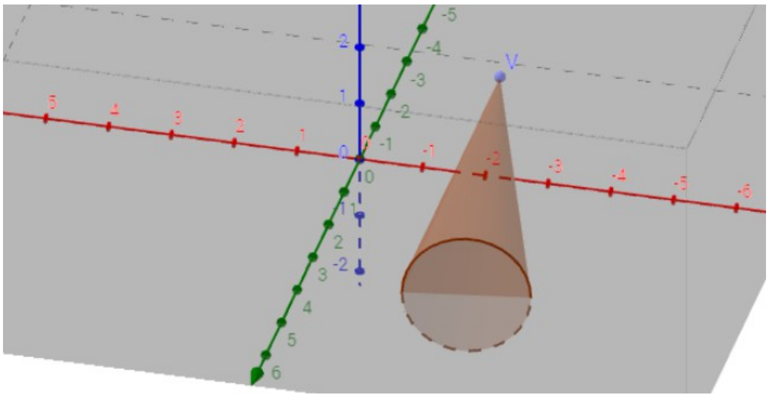
Índice de contenido

La circunferencia como superficie cónica

Un cono de revolución se engendra por el giro de una recta generatriz g alrededor de otra recta e llamada eje, con la cual se corta en un punto V llamado vértice.

Si este cono de revolución es cortado por un plano perpendicular al eje e, tendremos una circunferencia.

Sección sobre cono de revolución que genera circunferencia



La circunferencia como lugar geométrico

La circunferencia es el **lugar geométrico de los puntos del plano** $P(x,y)$ **cuta distancia a un punto fijo, llamado centro, es constante**.

La distancia constante que separa el centro de cualquier punto de la circunferencia es el radio r .

Sea $C(x_0,y_0)$ el centro de la circunferencia y $P(x,y)$ un punto genérico del plano. La distancia del punto $C(x_0,y_0)$ al punto $P(x,y)$ se define como:

$$d(C,P)=r$$

Y de la ecuación que mide la distancia entre dos puntos:

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=r$$

Ecuación de la circunferencia de centro $C(x_0,y_0)$ **y radio** r

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$ $\rightarrow$ Si el centro es $(0,0)$ $\rightarrow$ $x^2+y^2=r^2$

Desarrollando la expresión general de la circunferencia.

$$x^2+x_0^2-2\cdot x\cdot x_0+y^2+y_0^2-2\cdot y\cdot y_0=r^2$$

$$x^2+y^2-2\cdot x\cdot x_0-2\cdot y\cdot y_0+x_0^2+y_0^2-r^2=0$$

Llamando:

$$m=-2\mathrm{x}_0$$

$$n=-2\mathrm{y}_0$$

$$p=x_0^2+y_0^2-r^2$$

Obtenemos la ecuación desarrollada de la circunferencia

$$x^2+y^2+mx+ny+p=0$$

Desde la ecuación desarrollada podemos hallar las coordenadas del centro y el valor del radio.

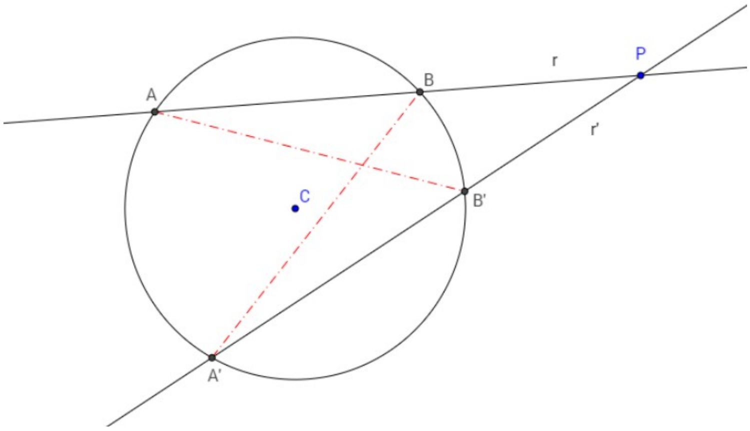
$$Centro\quad C=\left(\frac{-m}{2},\frac{-n}{2}\right)$$

$$Radio\quad r=\sqrt{\frac{m^2}{4}+\frac{n^2}{4}-p}$$

Potencia de un punto respecto de una circunferencia

Sea la circunferencia de centro $C(x_0, y_0)$ y un punto exterior $P(x_1, y_1)$. Desde P trazamos dos rectas secantes a la circunferencia, r y r' , que la cortarán respectivamente en los puntos A y B , A' y B' .

Los triángulos PBA' y $PB'A$ son semejantes, ya que tienen un ángulo común P , y dos ángulos iguales en los vértices A y A' por ser inscritos en la circunferencia en la que abarcan el mismo arco BB' .



Entonces se cumplirá:

$$\frac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}=\frac{\overline{PB}}{\overline{PB'}} \quad \rightarrow \quad \overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PA'}\cdot\overline{PB'}$$

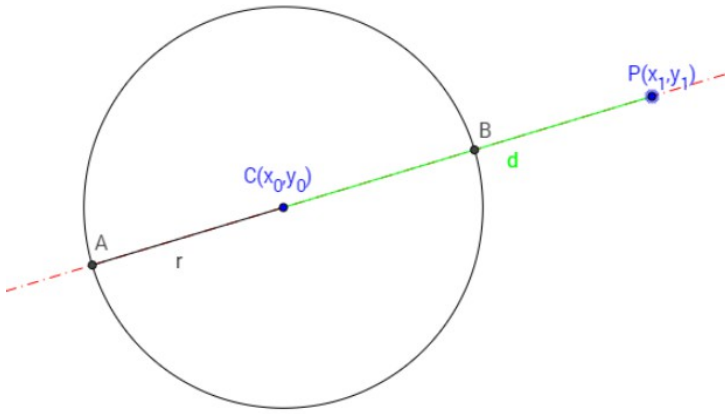
Este producto se mantiene constante para cualquier secante que corte a la circunferencia y pase por el punto externo P , y se llama potencia del punto P respecto de la circunferencia.

$$Pot(P)=\overline{PA}\cdot\overline{PB}$$

Si de todas las secantes que pasan por P , tomamos la que pasa por el centro, tendremos:

$Pot(P)=(d+r)(d-r) \quad \rightarrow \quad d$ es la distancia del punto P al centro de la circunferencia.

$Circunferencia \ de \ radio \ r. \ Distancia \ de \ P \ al \ centro \ es \ d$



Por lo tanto:

$$Pot(P)=(d+r)(d-r)=d^2-r^2$$
$$d \equiv distancia \ del \ punto \ P(x_1, y_1) \ al \ centro \ de \ la \ circunferencia \ C(x_0, y_0)$$
$$r \equiv \ radio \ de \ la \ circunferencia$$

La distancia entre $P(x_1, y_1)$ y $C(x_0, y_0)$ será $d(P, C)=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}$, por lo que la potencia queda:

Potencia del punto $P(x_1, y_1)$ respecto de la circunferencia de centro $C(x_0, y_0)$ y radio r

$$Pot(P)=(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2-r^2$$

Si recordamos la notación seguida en la ecuación desarrollada de la circunferencia:

$$m=-2x_0 \quad , \quad n=-2y_0 \quad , \quad p=x_0^2+y_0^2-r^2$$

$$Pot(P)=x_1^2+y_1^2+m\,x_1+n\,y_1+p$$

Con el valor de la potencia podemos determinar la posición relativa del punto $P(x_1, y_1)$ respecto la circunferencia.

$Si \quad Pot(P)>0 \quad \rightarrow \quad d^2-r^2>0 \quad \rightarrow \quad d>r \quad \rightarrow$ Punto exterior a la circunferencia

$Si \quad Pot(P)=0 \quad \rightarrow \quad d^2-r^2=0 \quad \rightarrow \quad d=r \quad \rightarrow$ Punto perteneciente a la circunferencia

$Si \quad Pot(P)<0 \quad \rightarrow \quad d^2-r^2<0 \quad \rightarrow \quad d<r \quad \rightarrow$ Punto interior a la circunferencia

Si de todas las rectas secantes trazadas desde el punto exterior $P(x_1, y_1)$ elegimos una de las dos tangentes del punto a la circunferencia, los puntos de corte $A=B$ coinciden por ser tangente:

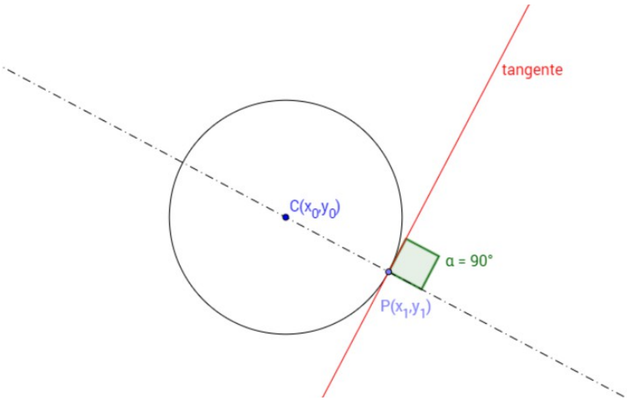
$$Pot(P)=\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PA}\cdot\overline{PA}=(\overline{PA})^2 \quad \rightarrow \quad \overline{PA}=\sqrt{Pot(P)}$$

Es decir, la distancia de un punto P al punto de tangencia sobre la circunferencia de la recta tangente trazada por él, es la raíz cuadrada de la potencia del punto.

Recta tangente a una circunferencia

Si el punto $P(x_{1,}y_1)$ **pertenece a la circunferencia de centro** $C(x_{0,}y_0)$, podemos obtener fácilmente la ecuación de la recta tangente a la circunferencia por ese punto sabiendo que la recta tangente es perpendicular a la recta que une $P(x_{1,}y_1)$ con $C(x_{0,}y_0)$.

La recta tangente a la circunferencia es normal a la prolongación del diámetro



Si el punto $P(x_{1,}y_1)$ **es exterior a la circunferencia**, habrá dos rectas tangentes a la circunferencia que pasen por $P(x_{1,}y_1)$.

Una forma de obtener las ecuaciones de estas dos rectas tangentes es la siguiente. Sabemos que la distancia del punto externo $P(x_{1,}y_1)$ a los puntos de tangencia A y B es igual a la raíz de la potencia: $\overline{PA}=\overline{PB}=\sqrt{Pot(P)}$.

Estos puntos de tangencia A y B distan del centro $C(x_{0,}y_0)$ una distancia igual al radio de la circunferencia r .

Imponiendo esta condiciones, llegaremos a un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, cuyas soluciones son las coordenadas de los puntos A y B .

Y una vez obtenidos los puntos de tangencia, podemos obtener las ecuaciones de las rectas tangentes a la circunferencia que pasarán por P y A , y por P y B respectivamente.

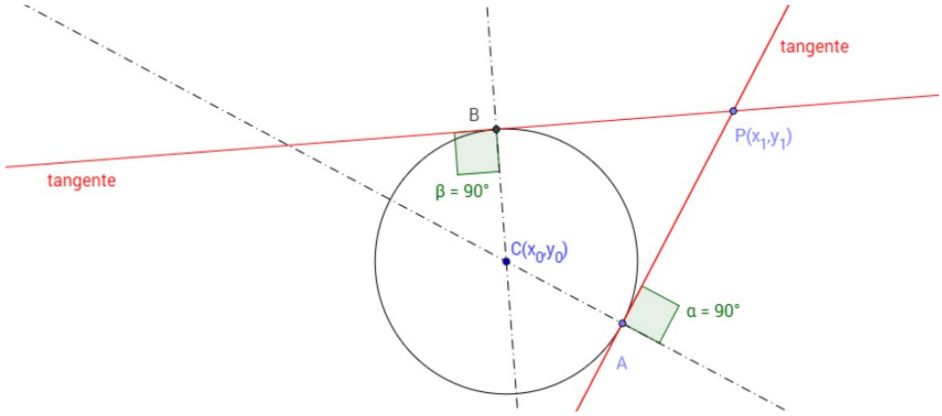
Un segundo método si el punto $P(x_1, y_1)$ no pertenece a la circunferencia es tomar, de todas las posibles rectas que pasan por P , solo las dos rectas que son tangentes a la circunferencia.

Por lo tanto, del siguiente sistema de ecuaciones necesitamos dos valores de la pendiente m que fuercen a que la solución sea única (tomamos como ejemplo la ecuación de la circunferencia centrada en el origen de coordenadas):

$$\begin{cases} m=\dfrac{y-y_1}{x-x_1} \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \end{cases}$$ → Sistema formado por ecuación de la recta y ecuación de circunferencia

Al resolver el sistema, obtendremos una ecuación de segundo grado en la variable x (o en la variable y , da igual con cual operemos). Y haremos 0 el valor del discriminante (contenido de la raíz) que se genera al resolver la variable, lo cual nos llevará a una condición para el parámetro m que ofrecerá las soluciones deseadas.

Rectas tangente a la circunferencia desde un punto exterior $P(x_1, y_1)$



Ejemplo

Obtener las ecuaciones generales de las dos rectas tangentes a la circunferencia centrada en el origen de coordenadas y radio 2 unidades, desde el punto exterior $P(0,7)$.

Ecuación de la circunferencia → $x^2+y^2=2^2$

Ecuación del haz de rectas que pasan por $P(0,7)$ → $m=\dfrac{y-7}{x-0}$

Con ambas ecuaciones planteamos un sistema de ecuaciones. Si despejamos de la recta $y=mx+7$ y llevamos este valor a la ecuación de la circunferencia:

$$x^2+(mx+7)^2=4 \rightarrow (1+m^2)x^2+14mx+45=0 \rightarrow x=\frac{-14m\pm\sqrt{(14\mathrm{m})^2-4\cdot(1+m^2)\cdot 45}}{2(1+m^2)}$$

Para que el sistema tenga solución única para cada recta tangente:

$$(14\mathrm{m})^2-4\cdot(1+m^2)\cdot 45=0 \rightarrow 16m^2-180=0 \rightarrow m=\frac{\pm\sqrt{45}}{2}$$

Una vez obtenidas las pendientes de las rectas tangentes, podemos obtener sus ecuaciones generales.

$$m=\frac{\sqrt{45}}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{\sqrt{45}}{2}=\frac{y-7}{x-0} \quad \rightarrow \quad \frac{\sqrt{45}}{2}x-y+7=0$$

$$m=\frac{-\sqrt{45}}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{-\sqrt{45}}{2}=\frac{y-7}{x-0} \quad \rightarrow \quad \frac{\sqrt{45}}{2}x+y-7=0$$