

Teoría – Tema 7

Ángulo de dos rectas

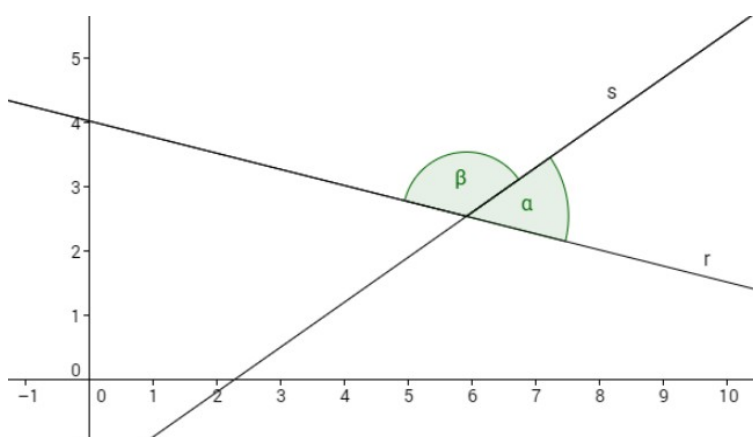
Índice de contenido

Ángulo según coeficientes de las ecuaciones generales de las rectas.....	2
Ángulo según pendientes de las rectas.....	4

Ángulo según coeficientes de las ecuaciones generales de las rectas

Dos rectas $r: Ax+By+C=0$ y $s: A'x+B'y+C'=0$, no paralelas, se cortan formando cuatro ángulos iguales dos a dos. Se llama ángulo de dos rectas al menor de ellos.

Uno de los ángulos siempre cumple: $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ \rightarrow 0 \leq \cos \alpha \leq 1$



El ángulo que forman dos rectas será el mismo que formen sus respectivos vectores directores.

$\vec{u}_r \equiv$ vector director recta r

$\vec{u}_s \equiv$ vector director recta s

Realizamos el producto escalar de ambos vectores.

$$\vec{u}_r \cdot \vec{u}_s = |\vec{u}_r| \cdot |\vec{u}_s| \cdot \cos(\alpha) \rightarrow \cos(\alpha) = \frac{\vec{u}_r \cdot \vec{u}_s}{|\vec{u}_r| \cdot |\vec{u}_s|}$$

Como α siempre es un ángulo del primer cuadrante, su coseno oscilará entre 0 y 1, por lo que tomaremos el valor absoluto de la expresión anterior.

$$\cos(\alpha) = \left| \frac{\vec{u}_r \cdot \vec{u}_s}{|\vec{u}_r| \cdot |\vec{u}_s|} \right| \rightarrow \alpha \text{ es el ángulo formado por vectores directores de las rectas}$$

Podemos expresar las coordenadas de los vectores directores de las rectas en función de los coeficientes de sus respectivas ecuaciones generales:

$$r: Ax + By + C = 0 \rightarrow \vec{u}_r = (-B, A)$$

$$s: A'x + B'y + C' = 0 \rightarrow \vec{u}_s = (-B', A')$$

Por lo tanto:

$$\cos(\alpha) = \left| \frac{\vec{u}_r \cdot \vec{u}_s}{|\vec{u}_r| \cdot |\vec{u}_s|} \right| = \left| \frac{(-B, A) \cdot (-B', A')}{\sqrt{(-B)^2 + (A)^2} \cdot \sqrt{(-B')^2 + (A')^2}} \right|$$

Ángulo α formado por las rectas r y s en función de los coeficientes de sus ecuaciones generales

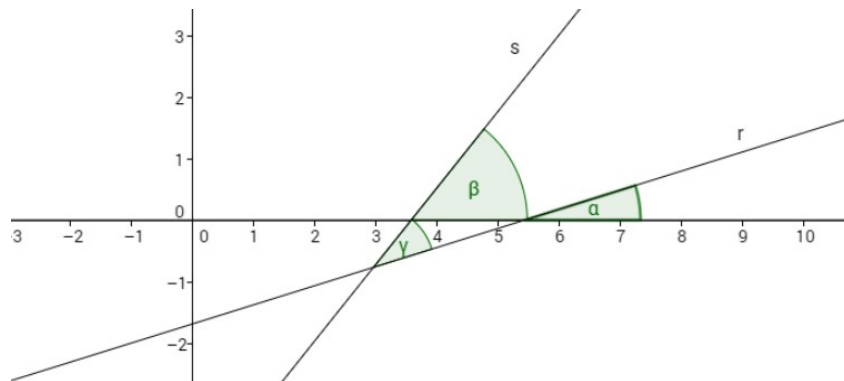
$$\cos(\alpha) = \left| \frac{A \cdot A' + B \cdot B'}{\sqrt{A^2 + B^2} \cdot \sqrt{(A')^2 + (B')^2}} \right| \rightarrow \alpha = \arccos(\cos(\alpha))$$

Ángulo según pendientes de las rectas

Sea $r: Ax + By + C = 0$ una recta con inclinación α sobre el semieje positivo OX. Sea $s: A'x + B'y + C' = 0$ una recta con inclinación β sobre el semieje positivo OX.

La pendiente de la recta r (tangente de la inclinación) será $tg(\alpha) = m_r$. Y la pendiente de la recta s será $tg(\beta) = m_s$.

Ángulo γ formado por el corte de dos rectas de inclinación α y β



La diferencia entre las inclinaciones, será el ángulo γ formado por ambas rectas.

$$\gamma = \alpha - \beta \rightarrow tg(\gamma) = tg(\alpha - \beta) = \frac{tg(\alpha) - tg(\beta)}{1 + tg(\alpha) \cdot tg(\beta)}$$

Ángulo γ formado por las rectas r y s en función de sus pendientes

$$tg(\gamma) = \left| \frac{m_r - m_s}{1 + m_r \cdot m_s} \right| \rightarrow \gamma = \text{arctg}(\gamma)$$

Ejemplo

¿Qué ángulo, forman, al cortarse, las rectas $r: 3x + y - 5 = 0$ y $s: x + 2y - 8 = 0$?

$$\vec{u}_r = (-1, 3) \quad , \quad \vec{u}_s = (-2, 1) \rightarrow \cos(\alpha) = \left| \frac{2+3}{\sqrt{1+9} \cdot \sqrt{4+1}} \right| = \left| \frac{5}{\sqrt{50}} \right| \rightarrow \alpha = 45^\circ$$

$$m_r = -3 \quad , \quad m_s = \frac{-1}{2} \rightarrow tg(\gamma) = \left| \frac{-3 + \frac{1}{2}}{1 + (-3) \cdot \frac{-1}{2}} \right| = \left| \frac{\frac{-5}{2}}{\frac{5}{2}} \right| = 1 \rightarrow \alpha = 45^\circ$$