Teoría – Tema 7

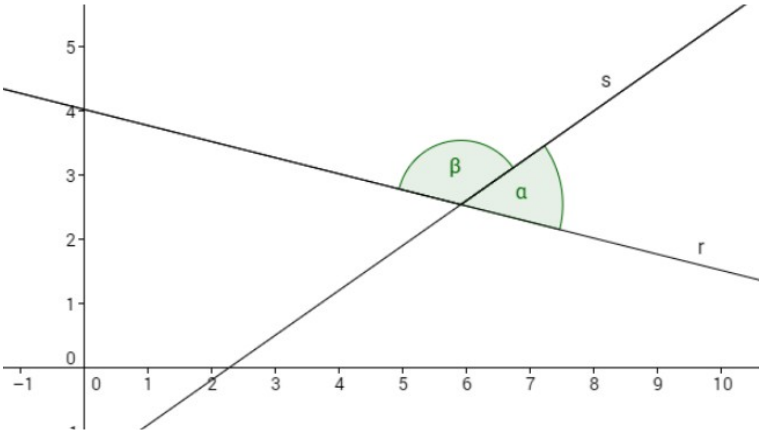
Ángulo de dos rectas

Índice de contenido

Ángulo según coeficientes de las ecuaciones generales de las rectas

Dos rectas $r: Ax+By+C=0$ y $s: A'x+B'y+C'=0$, no paralelas, se cortan formando cuatro ángulos iguales dos a dos. Se llama ángulo de dos rectas al menor de ellos.

$$Uno \ \ de \ \ los \ \ ángulos \ \ siempre \ \ cumple: \ 0º \leq \alpha \leq 90º \ \rightarrow \ 0 \leq \cos\alpha \leq 1$$



El ángulo que forman dos rectas será el mismo que formen sus respectivos vectores directores.

$$\vec{u}_r \equiv \ vector \ \ director \ \ recta \ \ r$$

$$\vec{u}_s \equiv \ vector \ \ director \ \ recta \ \ s$$

Realizamos el producto escalar de ambos vectores.

$$\vec{u}_r \cdot \vec{u}_s = |\vec{u}_r| \cdot |\vec{u}_s| \cdot \cos(\alpha) \ \rightarrow \ \cos(\alpha) = \frac{\vec{u}_r \cdot \vec{u}_s}{|\vec{u}_r| \cdot |\vec{u}_s|}$$

Como α siempre es un ángulo del primer cuadrante, su coseno oscilará entre 0 y 1 , por lo que tomaremos el valor absoluto de la expresión anterior.

$\cos(\alpha) = \left| \frac{\vec{u}_r \cdot \vec{u}_s}{|\vec{u}_r| \cdot |\vec{u}_s|} \right| \ \rightarrow \ \alpha$ **es el ángulo formado por vectores directores de las rectas**

Podemos expresar las coordenadas de los vectores directores de las rectas en función de los coeficientes de sus respectivas ecuaciones generales:

$$r: Ax+By+C=0 \quad \rightarrow \quad \vec{u}_r=(-B, A)$$
$$s: A'x+B'y+C'=0 \quad \rightarrow \quad \vec{u}_s=(-B', A')$$

Por lo tanto:

$$\cos(\alpha)=\left|\frac{\vec{u}_r\cdot\vec{u}_s}{|\vec{u}_r|\cdot|\vec{u}_s|}\right|=\left|\frac{(-B, A)\cdot(-B', A')}{\sqrt{(-B)^2+(A)^2}\cdot\sqrt{(-B')^2+(A')^2}}\right|$$

Ángulo α formado por las rectas r y s en función de los coeficientes de sus ecuaciones generales

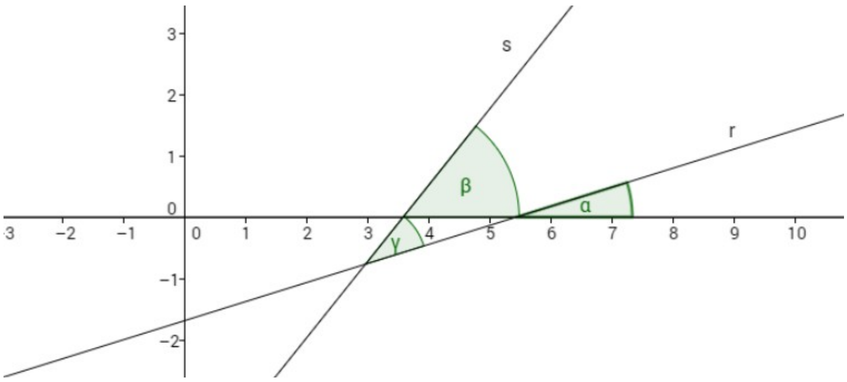
$$\cos(\alpha)=\left|\frac{A\cdot A'+B\cdot B'}{\sqrt{A^2+B^2}\cdot\sqrt{(A')^2+(B')^2}}\right| \quad \rightarrow \quad \alpha=arcocos(\alpha)$$

Ángulo según pendientes de las rectas

Sea $r: Ax+By+C=0$ una recta con inclinación α sobre el semieje positivo OX. Sea $s: A'x+B'y+C'=0$ una recta con inclinación β sobre el semieje positivo OX.

La pendiente de la recta r (tangente de la inclinación) será $tg(\alpha)=m_r$. Y la pendiente de la recta s será $tg(\beta)=m_s$.

Ángulo γ *formado por el corte de dos rectas de inclinación* α *y* β



La diferencia entre las inclinaciones, será el ángulo γ formado por ambas rectas.

$$\gamma=\alpha-\beta \quad \rightarrow \quad tg(\gamma)=tg(\alpha-\beta)=\frac{tg(\alpha)-tg(\beta)}{1+tg(\alpha)\cdot tg(\beta)}$$

Ángulo γ **formado por las rectas** r **y** s **en función de sus pendientes**

$$tg(\gamma)=\left|\frac{m_r-m_s}{1+m_r\cdot m_s}\right| \quad \rightarrow \quad \gamma=arcotg(\gamma)$$

Ejemplo

¿Qué ángulo, forman, al cortarse, las rectas $r: 3x+y-5=0$ y $r: x+2y-8=0$?

$$\vec{u}_r=(-1,3) \quad , \quad \vec{u}_r=(-2,1) \quad \rightarrow \quad \cos(\alpha)=\left|\frac{2+3}{\sqrt{1+9}\cdot\sqrt{4+1}}\right|=\left|\frac{5}{\sqrt{50}}\right| \quad \rightarrow \quad \alpha=45^o$$

$$m_r=-3 \quad , \quad m_s=\frac{-1}{2} \quad \rightarrow \quad tg(\gamma)=\left|\frac{-3+\frac{1}{2}}{1+(-3)\cdot\frac{-1}{2}}\right|=\left|\frac{\frac{-5}{2}}{\frac{5}{2}}\right|=1 \quad \rightarrow \quad \alpha=45^o$$