Teoría – Tema 7

Distancia de un punto a una recta

Índice de contenido

Distancia de un punto P conocido a una recta r conocida

Sea una recta $r: Ax+By+C=0$ y un punto $P(x_0, y_0)$ no perteneciente a la recta. Deseamos conocer la distancia del punto P a la recta r. Para ello, vamos a seguir el siguiente razonamiento:

1. Por el punto $P(x_0, y_0)$ vamos a trazar una recta paralela a r. Esta será la recta s.

2. Con lo aprendido en clases anteriores, vamos a obtener la distancia del origen a cada una de las rectas: $d(O, r)$, $d(O, s)$.

3. La distancia buscada del punto P a la recta r será, en valor absoluto, igual a la diferencia $|d(O, s) - d(O, r)|$.

Conocida la ecuación general de la recta, sabemos la pendiente de la recta: $m_r = \frac{-A}{B}$. Por lo tanto, todas las rectas paralelas a r tendrán la misma pendiente m_r. Es decir, si s es paralela a r $\rightarrow$ $m_s = m_r$. Y vamos a trazar esta recta s para que pase por el punto conocido $P(x_0, y_0)$.

La ecuación general de la recta s comparte con la ecuación general de la recta r el factor de proporción $m_s = m_r = \frac{-A}{B}$, por lo que podemos escribir $s: Ax+By+C'=0$.

Esto ya lo sabíamos: Si dos rectas comparten los términos A y B de sus ecuaciones generales, ambas rectas son paralelas. Y sus ecuaciones generales solo se distinguen en el término que no acompaña a las incógnitas x, y.

$$\left\{\begin{matrix} r: Ax+By+C=0 \\ s: Ax+By+C'=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \text{Dos rectas paralelas solo se distinguen en términos } C \text{ y } C'$$

¿Cómo obtener C' en la recta s? Sabiendo que el punto $P(x_0, y_0)$ pertenece a la recta s.

$$P(x_0, y_0) \in s \rightarrow Ax_0+By_0+C'=0 \rightarrow C' = -Ax_0 - By_0 = -(Ax_0+By_0)$$

Por lo tanto:

$$\left\{\begin{matrix} r: Ax+By+C=0 \\ s: Ax+By-(Ax_0+By_0)=0 \end{matrix}\right\}$$

Llegados a este punto, recordamos el resultado obtenido en clases anteriores sobre la distancia del origen $(0,0)$ a una recta (http://danipartal.net/pdf/1bachTema7Teoria02.pdf).

$$d(O,r)=\frac{-C}{\sqrt{A^2+B^2}} \quad , \quad d(O,s)=\frac{-C'}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{Ax_0+By_0}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

La distancia entre las dos rectas paraleras r y s será la diferencia entre estos dos resultados, y coincidirá con la distancia buscada entre el punto P y la recta r (tomando valor absoluto, ya que las distancias tienen sentido como número positivo).

$$d(P,r)=\left|\frac{Ax_0+By_0}{\sqrt{A^2+B^2}}-\frac{-C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$$

Distancia de un punto conocido $P(x_{0,}y_0)$ a una recta conocida $r: Ax+By+C=0$

$$d(P,r)=\left|\frac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$$