

## Teoría – Tema 7

### Ecuación normal de la recta. Cosenos directores

#### Índice de contenido

Ecuación normal de la recta.....	2
Cosenos directores.....	3

## Ecuación normal de la recta

Sea la ecuación general de una recta.

$$r: Ax + By + C = 0$$

Ya sabemos la relación entre los coeficientes de la recta en forma general y las coordenadas de un vector director  $\vec{u}$  de la recta:

$$A = u_y, \quad B = -u_x \rightarrow \vec{u} = (u_x, u_y) = (-B, A) \rightarrow \text{Vector director de la recta } r$$

Si este vector director  $\vec{u}$  es unitario, a la ecuación general de la recta se le conoce como **ecuación normal**.

Si el vector director  $\vec{u}$  no es unitario, siempre podemos normalizarlo:

$$\hat{u} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \left( \frac{-B}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right) \rightarrow \text{Vector director unitario de la recta } r$$

Por lo que siempre podemos obtener la ecuación normal de la recta dividiendo cada término de la ecuación general por el módulo del vector director.

### Ecuación normal de la recta

$$r: \frac{Ax}{\sqrt{A^2 + B^2}} + \frac{By}{\sqrt{A^2 + B^2}} + \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

## Cosenos directores

Sabemos que el producto de las pendientes de dos rectas perpendiculares es igual a  $-1$ . Por lo tanto, podemos obtener las coordenadas de un vector perpendicular a la recta.

$$\vec{u}_n = (A, B) \rightarrow \text{Vector perpendicular a la recta } r \rightarrow \text{Vector normal a la recta}$$

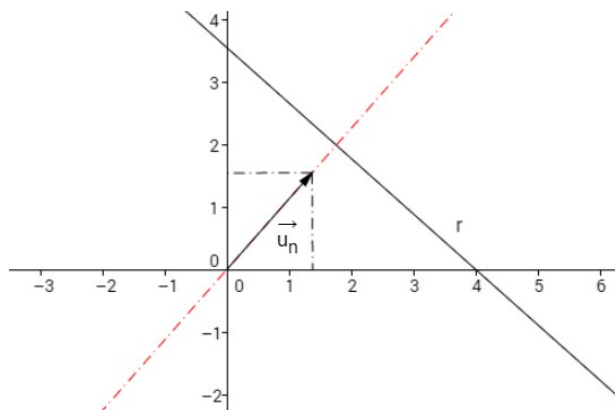
Y este vector normal a la recta también podemos normalizarlo, para forzar que su módulo sea la unidad.

$$\hat{u}_n = \left( \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} \right)$$

**Resumiendo.** La recta  $r$  posee un vector director unitario  $\hat{u} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \left( \frac{-B}{\sqrt{A^2+B^2}}, \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \right)$  y un vector normal unitario  $\hat{u}_n = \left( \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} \right)$ , con una ecuación normal que toma la forma  $r: \frac{Ax}{\sqrt{A^2+B^2}} + \frac{By}{\sqrt{A^2+B^2}} + \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0$ .

El representante canónico del vector normal unitario  $\hat{u}_n = \left( \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} \right)$  tendrá su inicio en el origen del sistema de referencias, y formará un ángulo  $\alpha$  y  $\beta = 90^\circ - \alpha$  con los ejes cartesianos.

*Recta  $r$  y vector normal  $\vec{u}_n$  perpendicular a la recta  $r$*



El vector normal unitario  $\hat{u}_n$  proyectado sobre el eje horizontal, da lugar a  $\cos(\alpha)$ , ya que en el triángulo rectángulo formado por el vector y sus proyecciones tendremos:

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}}$$

Y la hipotenusa es el módulo del vector normal unitario  $\hat{u}_n \rightarrow$  Hipotenusa igual a 1. Es decir:

$$\cos(\alpha) = \text{cateto contiguo} \rightarrow \cos(\alpha) = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Si reflexionamos de manera análoga con el seno del ángulo, comprobamos que coincide con la proyección del vector sobre el eje vertical. Es decir:

$$\text{sen}(\alpha) = \cos(90^\circ - \alpha) = \text{cateto opuesto} \rightarrow \text{sen}(\alpha) = \cos(90^\circ - \alpha) = \cos(\beta) = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Los valores obtenidos para  $\cos(\alpha)$  y  $\cos(\beta)$  se llaman **cosenos directores de la recta**, que coinciden con **los cosenos de los ángulos que forma un vector normal a la recta con los ejes cartesianos**.

Si llevamos estos resultados a la ecuación normal de la recta, tendremos una ecuación en función de los ángulos  $\alpha$  y  $\beta = 90^\circ - \alpha$ .

#### Ecuación de la recta en función de sus cosenos directores

$$r: \cos(\alpha) \cdot x + \cos(\beta) \cdot y + \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$