Teoría – Tema 7

Ecuación normal de la recta. Cosenos directores

Índice de contenido

Ecuación normal de la recta

Sea la ecuación general de una recta.

$$r: Ax+By+C=0$$

Ya sabemos la relación entre los coeficientes de la recta en forma general y las coordenadas de un vector director $\vec{u}$ de la recta:

$A=u_y \quad , \quad B=-u_x \quad \rightarrow \quad \vec{u}=(u_x, u_y)=(-B, A)$ → **Vector director de la recta** r

Si este vector director $\vec{u}$ es unitario, a la ecuación general de la recta se le conoce como **ecuación normal.**

Si el vector director $\vec{u}$ no es unitario, siempre podemos normalizarlo:

$\hat{u}=\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}=\left(\frac{-B}{\sqrt{A^2+B^2}}, \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)$ → **Vector director unitario de la recta** r

Por lo que siempre podemos obtener la ecuación normal de la recta dividiendo cada término de la ecuación general por el módulo del vector director.

Ecuación normal de la recta

$$r: \frac{Ax}{\sqrt{A^2+B^2}}+\frac{By}{\sqrt{A^2+B^2}}+\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}=0$$

Cosenos directores

Sabemos que el producto de las pendientes de dos rectas perpendiculares es igual a -1 . Por lo tanto, podemos obtener las coordenadas de un vector perpendicular a la recta.

$\vec{u}_n=(A, B)$ $\rightarrow$ **Vector perpendicular a la recta** r $\rightarrow$ **Vector normal a la recta**

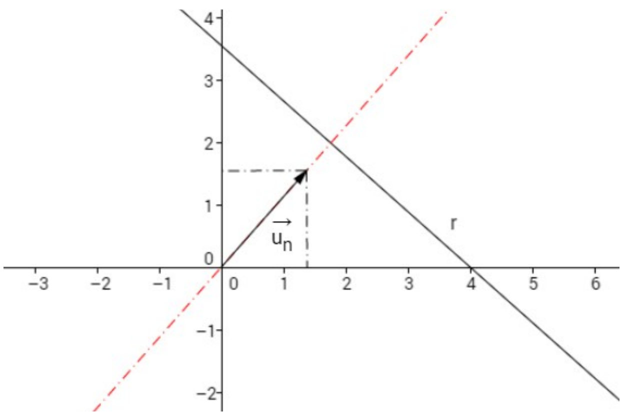
Y este vector normal a la recta también podemos normalizarlo, para forzar que su módulo sea la unidad.

$$\hat{u}_n=\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)$$

Resumiendo. La recta r posee un vector director unitario $\hat{u}=\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}=\left(\frac{-B}{\sqrt{A^2+B^2}}, \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)$ y un vector normal unitario $\hat{u}_n=\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)$, con una ecuación normal que toma la forma $r: \frac{A x}{\sqrt{A^2+B^2}}+\frac{B y}{\sqrt{A^2+B^2}}+\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}=0$.

El representante canónico del vector normal unitario $\hat{u}_n=\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)$ tendrá su inicio en el origen del sistema de referencias, y formará un ángulo α y $\beta=90º-\alpha$ con los ejes cartesianos.

Recta r *y vector normal* $\vec{u}_n$ *perpendicular a la recta* r



El vector normal unitario $\hat{u}_n$ proyectado sobre el eje horizontal, da lugar a $\cos(\alpha)$, ya que en el triángulo rectángulo formado por el vector y sus proyecciones tendremos:

$$\cos(\alpha)=\frac{cateto\ \ contiguo}{hipotenusa}$$

Y la hipotenusa es el módulo del vector normal unitario $\hat{u}_n$ $\rightarrow$ Hipotenusa igual a 1 . Es decir:

$$\cos(\alpha)=cateto\ \ contiguo\ \rightarrow\ \cos(\alpha)=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Si reflexionamos de manera análoga con el seno del ángulo, comprobamos que coincide con la proyección del vector sobre el eje vertical. Es decir:

$$sen(\alpha)=\cos(90^o-\alpha)=cateto\ \ opuesto\ \rightarrow\ sen(\alpha)=\cos(90^o-\alpha)=\cos(\beta)=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Los valores obtenidos para $\cos(\alpha)$ y $\cos(\beta)$ se llaman **cosenos directores de la recta**, que coinciden con **los cosenos de los ángulos que forma un vector normal a la recta con los ejes cartesianos**.

Si llevamos estos resultados a la ecuación normal de la recta, tendremos una ecuación en función de los ángulos α y $\beta=90^o-\alpha$.

Ecuación de la recta en función de sus cosenos directores

$$r:\cos(\alpha)\cdot x+\cos(\beta)\cdot y+\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}=0$$