Teoría – Tema 6

Rectas paralelas y perpendiculares

Índice de contenido

Rectas paralelas

Dos rectas son paralelas cuando tienen la misma dirección, es decir, cuando tienen la misma inclinación.

Los vectores directores de dos rectas paralelas serán linealmente dependientes, al ser paralelos. Es decir, uno es combinación lineal del otro.

Sean las rectas paralelas y sus vectores directores siguientes:

$$recta \ \ r \ \rightarrow \ \ vector \ \ director \ \ \vec{u}=(u_x, u_y)$$

$$recta \ \ s \ \rightarrow \ \ vector \ \ director \ \ \vec{v}=(v_x, v_y)$$

Expresamos un vector como combinación lineal del otro:

$$\vec{u}=\lambda\cdot\vec{v}\,, \ \ \lambda\in\mathbb{R} \ \rightarrow \ (u_x, u_y)=\lambda\cdot(v_x, v_y) \ \rightarrow \text{Igualando componentes:}$$

$$\left\{\begin{matrix} u_x=\lambda\cdot v_x \\ u_y=\lambda\cdot v_y \end{matrix}\right\} \ \rightarrow \ \left\{\begin{matrix} \dfrac{u_x}{v_x}=\lambda \\ \dfrac{u_y}{v_y}=\lambda \end{matrix}\right\} \ \rightarrow \text{Igualamos} \rightarrow \ \frac{u_x}{v_x}=\frac{u_y}{v_y}$$

Es decir, **la igualdad de inclinaciones en rectas paralelas implica que el cociente entre las componentes horizontales y el cociente entre las componentes verticales de ambos vectores directores sea constante**. Otra forma de ver esta igualdad de inclinaciones es:

$$\frac{u_x}{v_x}=\frac{u_y}{v_y} \ \rightarrow \ \frac{u_x}{u_y}=\frac{v_x}{v_y} \ \rightarrow \ m_r=m_s \ \rightarrow \textbf{Igualdad de pendientes entre rectas paralelas}$$

Si expresamos dos rectas paralelas en su forma general, tendremos:

$$recta \ \ r \ \rightarrow \ \ A_r x+B_r y+C_r=0$$

$$recta \ \ s \ \rightarrow \ \ A_s x+B_s y+C_s=0$$

Recordemos que podemos obtener las pendientes de estas rectas a partir de los parámetros de la ecuación general:

$$m_r = \frac{-A_r}{B_r} \quad , \quad m_s = \frac{-A_s}{B_s} \quad \rightarrow \quad m_r = m_s \quad \rightarrow \quad \frac{A_r}{B_r} = \frac{A_s}{B_s} \quad \rightarrow \quad \frac{A_r}{A_s} = \frac{B_r}{B_s}$$

Es decir, **dos rectas son paralelas si el cociente entre los coeficientes que acompañan a x y el cociente entre los coeficientes que acompañan a y en la ecuación general, es constante**.

Otra consecuencia del paralelismo de rectas es la siguiente: **dos rectas que en su forma general solo se diferencian en el término independiente, son paralelas**.

$$recta \quad r \quad \rightarrow \quad A_r x + B_r y + C_r = 0$$

$$recta \quad s \quad \rightarrow \quad A_s x + B_s y + C_s = 0$$

Si $A_r = A_s$, $B_r = B_s$, $C_r \neq C_s$ $\rightarrow$ r y s son paralelas

Ejemplo

Dada la recta $r: x - 3y + 5 = 0$, obtener la recta paralela que pasa por el punto $P(3,2)$.

Hemos estudiado muchas formas distintas de expresar la ecuación de una recta, por lo que este tipo de problemas suelen tener distintas formas de resolverse, todas perfectamente válidas.

Una opción sería obtener la pendiente de la recta → $m = \frac{-A}{B} = \frac{1}{3}$

Y con la pendiente y el punto $P(3,2)$ podemos obtener la ecuación punto pendiente de la recta paralela → $s: \frac{1}{3} = \frac{y-2}{x-3} \quad \rightarrow \quad s: x - 3y + 3 = 0$

Una segunda forma de resolverlo es recordando que si las ecuaciones generales de dos rectas solo se diferencian en el término C , ambas rectas son paralelas. Por lo tanto:

$s: x - 3y + C = 0$ → si $P(3,2) \in s \quad \rightarrow \quad 3 - 3 \cdot 2 + C_s = 0 \quad \rightarrow \quad C_s = 3 \quad \rightarrow \quad s: x - 3y + 3 = 0$

Rectas perpendiculares

Dos rectas son perpendiculares cuando entre si forman un ángulo de 90º. Por tanto, sus vectores directores son perpendiculares. Y recordamos que el producto escalar de dos vectores perpendiculares es cero.

Sean las rectas perpendiculares y sus vectores directores siguientes:

$$recta \;\; r \;\; \rightarrow \;\; vector \;\; director \;\; \vec{u}=(u_x, u_y)$$

$$recta \;\; s \;\; \rightarrow \;\; vector \;\; director \;\; \vec{v}=(v_x, v_y)$$

El producto escalar será nulo → $\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \;\; \rightarrow \;\; u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y = 0 \;\; \rightarrow \;\; u_x \cdot v_x = -u_y \cdot v_y$

Por tanto → $\frac{u_x}{u_y}=-\frac{v_y}{v_x} \;\; \rightarrow \;\; \frac{1}{m_r}=-m_s \;\; \rightarrow \;\; m_r \cdot m_s=-1$ → Relación entre las pendientes de rectas perpendiculares: **dos rectas son perpendiculares cuando sus pendientes sin inversas y opuestas; o lo que es lo mismo, cuando el producto de sus pendientes es igual a** -1 **.**

Otra forma de ver la perpendicularidad: **dos rectas que en su forma general tienen permutados los coeficientes que acompañan a** x **y a** y **, y uno de ellos con el signo cambiado, son perpendiculares..**

$$recta \;\; r \;\; \rightarrow \;\; A_r x + B_r y + C_r = 0$$

$$recta \;\; s \;\; \rightarrow \;\; A_s x + B_s y + C_s = 0$$

Si $m_r \cdot m_s = -1 \;\; \rightarrow \;\; \frac{-A_r}{B_r}\cdot\frac{-A_s}{B_s}=-1 \;\; \rightarrow \;\; A_r \cdot A_s = -B_r \cdot B_s \;\; \rightarrow \;\; A_r \cdot A_s + B_r \cdot B_s = 0 \;\; \rightarrow \;\; r$ y s son perpendiculares

Ejemplo

Obtener la ecuación de una la perpendicular a $r: 2x-3y+7=0$ que pasa por $P(1,5)$.

$m_r=\frac{2}{3}$ → como se cumple $m_r \cdot m_s = -1 \;\; \rightarrow \;\; m_s=\frac{-3}{2}$

Usamos ecuación punto pendiente → $s: \frac{-3}{2}=\frac{y-5}{x-1} \;\; \rightarrow \;\; s: 3x+2y-13=0$