Problemas – Tema 6

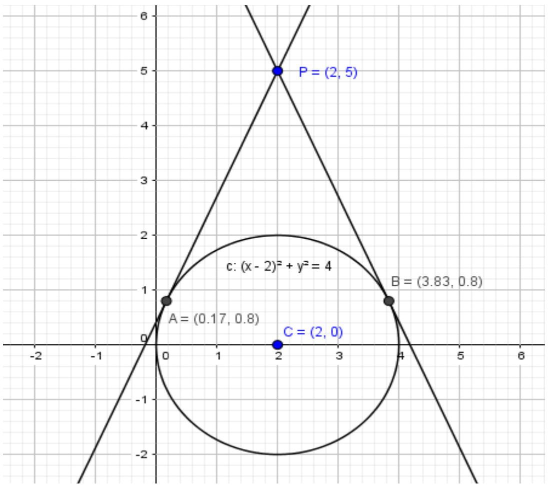
Solución a problemas de rectas - Hoja 7 - Problemas 1, 2

Hoja 7. Problema 1

1. Sea la circunferencia de centro $(2,0)$ y radio 2 . Sea el punto $P(2,5)$. Obtener los puntos de tangencia de las rectas tangentes a la circunferencia que pasan por P . (Ayuda: si dibujas primero la circunferencia, la posición del punto P respecto al centro puede facilitar los cálculos).

La ecuación de la circunferencia resulta → $(x-2)^2+y^2=4$.

La representamos en Geogebra, junto al punto $P(2,5)$ y a las rectas tangentes.



El punto $P(2,5)$ se encuentra sobre la vertical del centro de la circunferencia, por lo que los puntos de tangencia serán simétricos respecto la recta vertical $x=2$, como puede apreciarse en la imagen.

Sabemos que la distancia del punto P a cada punto de tangencia coincide con la raíz cuadrada de la potencia. Calculemos la potencia del punto.

$$Pot(P)=d(P,C)^2-r^2$$

$d(P,C)=\sqrt{(2-2)^2+(5-0)^2}=5u$ → Que podíamos deducir viendo la gráfica superior

$r=2 \quad \rightarrow \quad Pot(P)=5^2-2^2=21$

La distancia de P a cada punto de tangencia será $\sqrt{21}$. Si llamamos a uno de los puntos de tangencia $A(x, y)$ cumplirá entonces:

$$D(P, A)=\sqrt{21} \rightarrow \sqrt{(x-2)^2+(y-5)^2}=\sqrt{21} \rightarrow (x-2)^2+(y-5)^2=21$$

Además el punto $A(x, y)$ cumple que dista del centro de la circunferencia una distancia igual al radio. Es decir, el punto $A(x, y)$ satisface la ecuación de la circunferencia.

$$D(C, A)=r \rightarrow \sqrt{(x-2)^2+(y-0)^2}=2 \rightarrow (x-2)^2+y^2=4$$

Llegamos a un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas.

$$\begin{Bmatrix} (x-2)^2+(y-5)^2=21 \\ (x-2)^2+y^2=4 \end{Bmatrix} \rightarrow \text{Restamos ambas ecuaciones} \rightarrow (y-5)^2-y^2=17$$

$$y^2+25-10y-y^2=17 \rightarrow 8=10y \rightarrow y=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}=0{,}8$$

La coordenada horizontal resulta → $(x-2)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2=4 \rightarrow x=0{,}17 \quad , \quad x=3{,}83$

Los puntos solución son $A(0{,}17\,,\,0{,}8)$ y $A(3{,}83\,,\,0{,}8)$.

Hoja 7. Problema 2

2. Sea la circunferencia $x^2+y^2-4x+2y+3=0$ **. Determinar si los siguientes puntos son externos, internos o pertenecientes a la circunferencia.**

a) $(3,0)$

b) $(1,-2)$

c) $(3,1)$

La forma más directa de saber la posición relativa de un punto respecto a una circunferencia es comparar la distancia del punto al centro con el valor del radio.

Comparando $x^2+y^2-4x+2y+3=0$ con la fórmula general $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$ como hemos explicado en clase y desarrollado en varios ejercicios, concluimos:

$$C(2,-1)$$
$$r=\sqrt{2}$$

a) $P(3,0) \rightarrow d(P,C)=\sqrt{(2-3)^2+(-1+0)^2}=\sqrt{2}=r$ → punto perteneciente a la circunferencia

b) $P(1,-2) \rightarrow d(P,C)=\sqrt{(2-1)^2+(-1+2)^2}=\sqrt{2}=r$ → punto perteneciente a la circunferencia

c) $P(3,1) \rightarrow d(P,C)=\sqrt{(2-3)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{5}>r$ → punto exterior