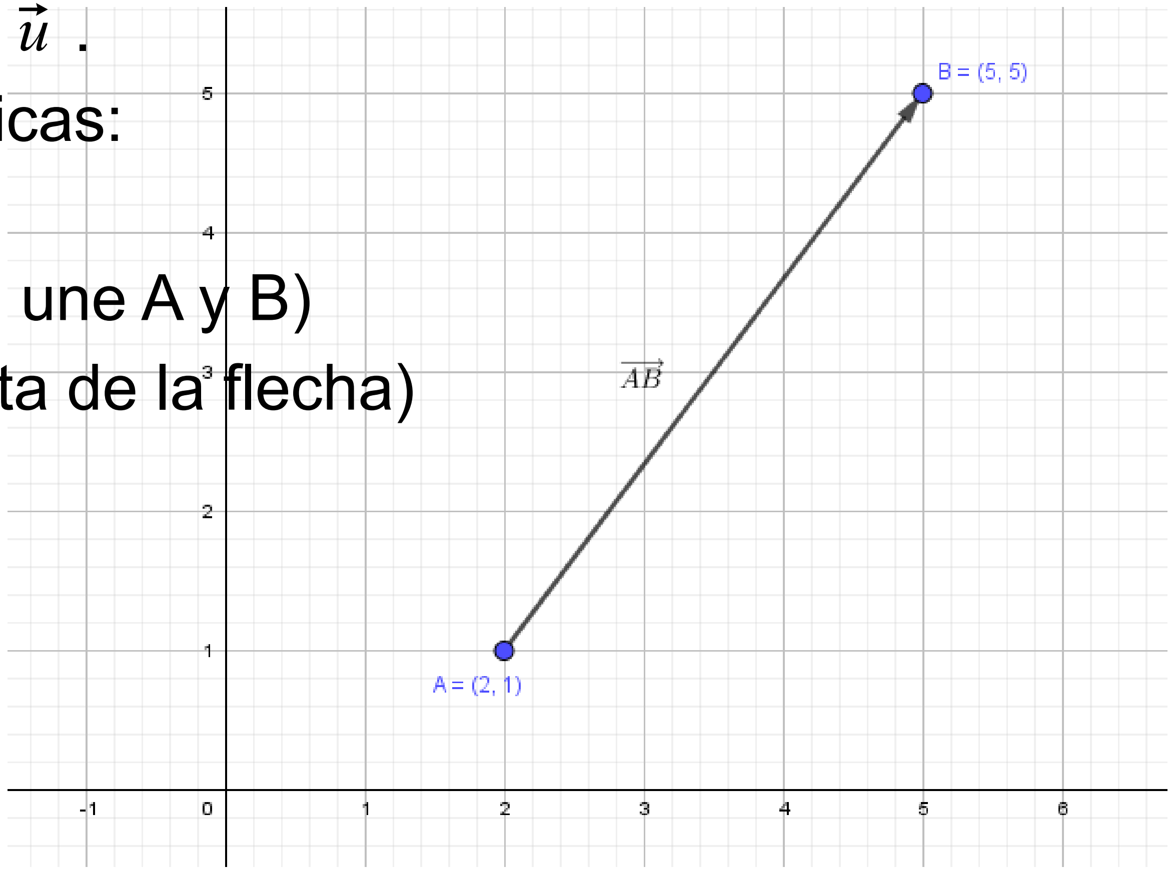
Teoría – Tema 5

Vector: longitud, dirección y sentido

Un vector es una flecha contenida entre un punto de inicio (A) y un punto de fin (B). Se denota con los nombres de los puntos de inicio y fin $\vec{AB}$, o bien con una letra en minúscula $\vec{u}$.

Un vector posee tres características:

- **Longitud** (módulo)
- **Dirección** (el de la recta que une A y B)
- **Sentido** (indicado por la punta de la flecha)



Componentes de un vector

Dados dos puntos en dos dimensiones $A(a_x, a_y)$ y $B(b_x, b_y)$, las componentes del vector $\vec{AB}$ se obtienen restando a las componentes de B las componentes de A (**final menos inicial**). Es decir:

$$\vec{AB}=(b_x-a_x, b_y-a_y)$$

Si los puntos fuesen en tres dimensiones $A(a_x, a_y, a_z)$ y $B(b_x, b_y, b_z)$, las componentes del vector serían:

$$\vec{AB}=(b_x-a_x, b_y-a_y, b_z-a_z)$$

Veamos un par de ejemplos:

$$A(2,3)\ ,\ B(4,-1) \rightarrow \vec{AB}=(4-2,-1-3) \rightarrow \vec{AB}=(2,-4)$$

$$A(2,3,-5)\ ,\ B(4,-1,0) \rightarrow \vec{AB}=(4-2,-1-3,0-(-5)) \rightarrow \vec{AB}=(2,-4,5)$$

¿Cuántas componentes puede tener un vector?

Infinitas...

Vector libre

Si no conocemos los puntos de inicio y final del vector, hablamos de vector libre. Por ejemplo: $\vec{u}=(2,1)$

¿Cómo representar un vector libre en el plano?

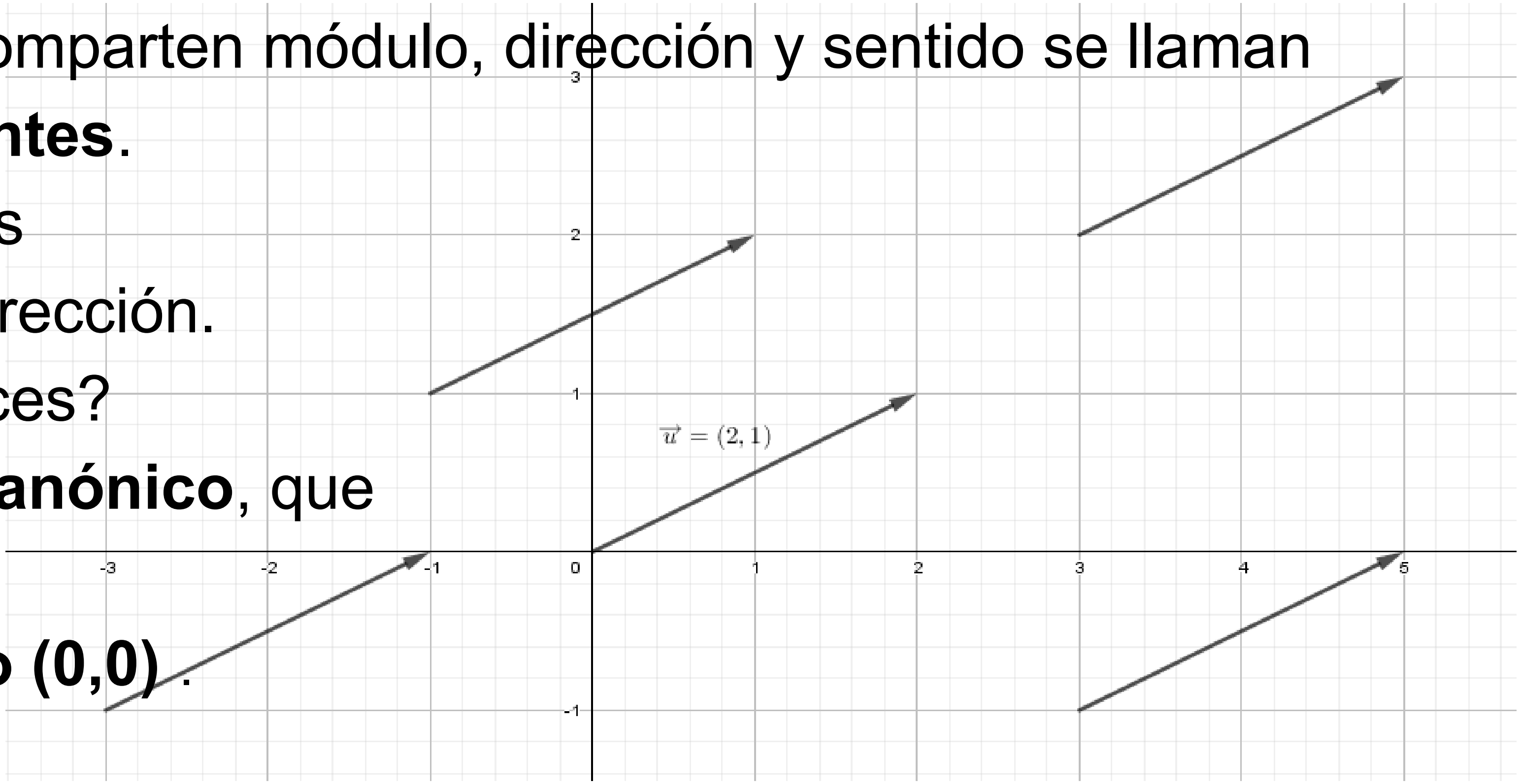
Hay infinitas posibilidades.

Los vectores que comparten módulo, dirección y sentido se llaman **vectores equipolentes**.

Dos rectas paralelas marcan la misma dirección.

¿Cuál elegir, entonces?

El **representante canónico**, que es el que tiene por **origen el punto (0,0)** .



Módulo de un vector

Esto nos sonará de estudiar los números complejos.

Dado un vector $\vec{u}=(u_x, u_y)$ su módulo es igual a:

$$|\vec{u}|=\sqrt{u_x^2+u_y^2}$$

Si el vector fuese en tres dimensiones $\vec{u}=(u_x, u_y, u_z)$, el módulo quedaría:

$$|\vec{u}|=\sqrt{u_x^2+u_y^2+u_z^2}$$

Recuerda, el módulo indica la longitud del vector. Por lo tanto siempre es una cantidad positiva.

Vector unitario a partir de un vector conocido

Dado un vector conocido $\vec{u}=(u_x,u_y)$, su vector unitario es aquel que tiene **la misma dirección y sentido, pero módulo unidad**. Se obtiene dividiendo cada componente por el módulo del vector. Y se denota $\hat{u}$.

$$\hat{u}=\left(\frac{u_x}{|\vec{u}|},\frac{u_y}{|\vec{u}|}\right) \rightarrow \quad |\hat{u}|=1$$

Si el vector fuese en tres dimensiones $\vec{u}=(u_x,u_y,u_z)$ el unitario es:

$$\hat{u}=\left(\frac{u_x}{|\vec{u}|},\frac{u_y}{|\vec{u}|},\frac{u_z}{|\vec{u}|}\right) \rightarrow \quad |\hat{u}|=1$$

Vectores unitarios especialmente importantes en dos dimensiones son:

$\hat{i}=(1,0)$, $\hat{j}=(0,1)$

Y en tres dimensiones:

$\hat{i}=(1,0,0)$, $\hat{j}=(0,1,0)$, $\hat{k}=(0,0,1)$

Ángulo de un vector respecto al eje horizontal OX

Al igual que en la fase de los números complejos, el ángulo que forma el vector $\vec{u}=(u_x, u_y)$ con respecto al eje horizontal OX, en sentido antihorario, viene dado por la expresión:

$$\alpha = arcotg\left(\frac{u_y}{u_x}\right)$$

Recuerda que es importante saber el signo de cada componente para conocer en qué cuadrante está el ángulo.

Ejemplos para practicar:

a) Obtener el ángulo que forma el vector $\vec{u}=(1,3)$ y el vector $\vec{v}=(3,-1)$ con el eje horizontal OX.

b) ¿Existe alguna relación especial entre los ángulos del apartado anterior? ¿Podríamos sacar alguna conclusión general sobre las componentes de dos vectores perpendiculares?

Pendiente de un vector

La pendiente de un vector $\vec{u}=(u_x, u_y)$ es simplemente **la tangente del ángulo que forma el vector con el eje horizontal OX**. Suele denotarse con la letra $m_{\vec{u}}$.

$$m_{\vec{u}}=tg(\alpha) \ , \ \alpha=arcotg\left(\frac{u_y}{u_x}\right) \rightarrow \ m_{\vec{u}}=tg\left(arcotg\left(\frac{u_y}{u_x}\right)\right) \rightarrow \ m_{\vec{u}}=\frac{u_y}{u_x}$$

Es decir, basta con **dividir la segunda componente entre la primera** para obtener la pendiente del vector.

El concepto de pendiente es propio únicamente de los vectores en dos dimensiones.

Ejemplos para practicar:

a) Obtener la pendiente del vector $\vec{u}=(1,3)$ y el vector $\vec{v}=(3,-1)$.

b) ¿Existe alguna relación especial entre las pendiente del apartado anterior? ¿Podríamos sacar alguna conclusión general sobre las pendientes de dos vectores perpendiculares?

Vectores paralelos, opuestos y perpendiculares

Dos vectores $\vec{u}=(u_x,u_y)$, $\vec{v}=(v_x,v_y)$ paralelos tienen la misma pendiente. Es decir $\rightarrow$ $m_{\vec{u}}=m_{\vec{v}}$

Ojo, dos vectores opuestos también tienen la misma pendiente. A los vectores paralelos y opuestos también se les llama vectores proporcionales, porque el cociente de sus componentes se mantiene proporcional. Es decir $\rightarrow$ $\frac{u_x}{v_x}=\frac{u_y}{v_y}=k$

Siendo k la constante de proporción. Si k es positiva, los vectores son paralelos. Si k es negativa, los vectores son opuestos.

Dos vectores son perpendiculares si el producto de sus pendientes es igual a -1. Es decir $\rightarrow$ $m_{\vec{u}}\cdot m_{\vec{v}}=-1$

Dado un vector $\vec{u}=(u_x,u_y)$ en dos dimensiones, podremos obtener sus dos vectores perpendiculares intercambiando las posiciones de las dos componentes y cambiando el signo a solo una de las componentes.

Producto de un número por un vector

Un número real k multiplica a un vector $\vec{u}=(u_x, u_y)$, mulplicando cada una de las componentes del vector. Es decir:

$$k\cdot\vec{u}=(k\cdot u_x, k\cdot u_y)$$

Suma y resta de vectores

Para sumar dos vectores $\vec{u}=(u_x, u_y)$, $\vec{v}=(v_x, v_y)$, operamos componente a componente.

$$\vec{u}+\vec{v}=(u_x, u_y)+(v_x, v_y)=(u_x+v_x, u_y+v_y)$$

$$\vec{u}-\vec{v}=(u_x, u_y)-(v_x, v_y)=(u_x-v_x, u_y-v_y)$$

Ejemplos para practicar:

Dados los vectores $\vec{u}=(1,4)$, $\vec{v}=(2,-1)$, calcula:

a) $\vec{u}+3\vec{v}$

b) $5\vec{u}-2\vec{v}$

Expresar un vector de dos dimensiones en función de los vectores unitarios $\hat{i}$, $\hat{j}$

Recordamos los vectores unitarios $\hat{i}=(1,0)$, $\hat{j}=(0,1)$. Son vectores paralelos a los ejes de coordenadas.

Dado un vector $\vec{u}=(u_x, u_y)$ podemos expresarlo en función de esos vectores unitarios:

$$\vec{u}=(u_x, u_y)=u_x\cdot(1,0)+u_y\cdot(0,1)=u_x\cdot\hat{i}+u_y\cdot\hat{j}$$

Esta expresión se conoce como proyección ortogonal del vector sobre los vectores unitarios paralelos a los ejes de coordenadas.

Ejemplos para practicar:

a) Expresa los vectores $\vec{u}=(1,4)$, $\vec{v}=(2,-1)$ en función de los vectores unitarios $\hat{i}$, $\hat{j}$

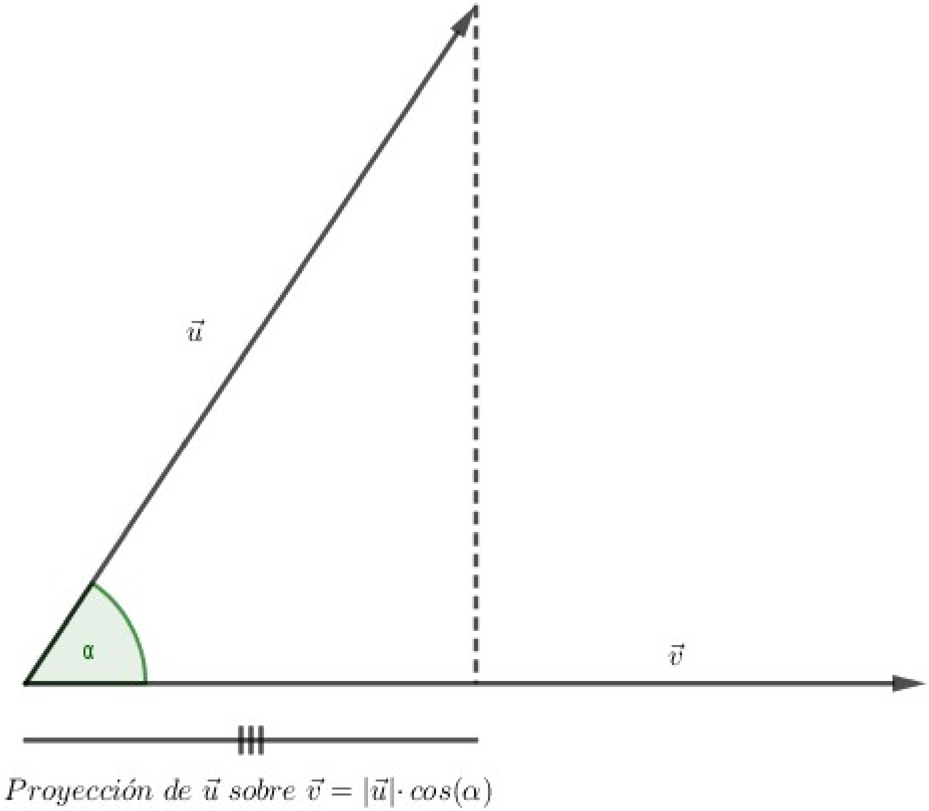
b) ¿Cómo sería en el caso de un vector en tres dimensiones? ¿Cuáles serían los tres vectores unitarios paralelos a los ejes?

Proyección ortogonal de un vector sobre otro

Dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, que forman entre sí un ángulo α , definimos la proyección ortogonal de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ como el módulo del vector $\vec{u}$ por el coseno del ángulo.

$$Proyección\, de\, \vec{u}\, sobre\, \vec{v} = |\vec{u}| \cdot \cos(\alpha)$$

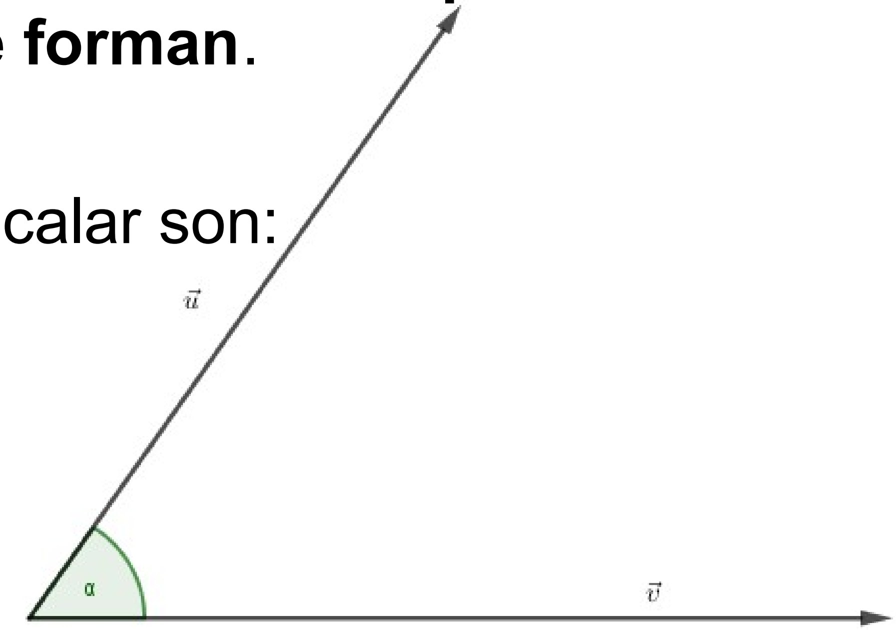
El ángulo α entre dos vectores es positivo en sentido antihorario, y siempre se elige el ángulo más pequeño que forman los vectores entre sí.



Producto escalar de dos vectores: definición

El producto escalar de dos vectores se define como el **producto de los módulos por el coseno del ángulo que forman**.

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\alpha)$$



Propiedades importantes del producto escalar son:

- Es conmutativo

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\alpha)$$
$$\vec{v}\cdot\vec{u}=|\vec{v}|\cdot|\vec{u}|\cdot\cos(-\alpha)$$
$$\cos(\alpha)=\cos(-\alpha)\ \rightarrow\ \vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$$

- Si los vectores son perpendiculares, el producto escalar es nulo:

$$\vec{u}\perp\vec{v}\rightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=0$$

- El producto escalar de un vector consigo mismo es igual al cuadrado del módulo del vector.

$$\vec{u}\cdot\vec{u}=|\vec{u}|\cdot|\vec{u}|\cdot\cos(0^{o})\ \rightarrow\ \vec{u}\cdot\vec{u}=|\vec{u}|^{2}$$

Producto escalar de dos vectores: expresión analítica a partir de los vectores unitarios paralelos a los ejes

Expresamos los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en función de los vectores unitarios:

$$\vec{u}=u_x\hat{i}+u_y\hat{j}\ ,\ \vec{v}=v_x\hat{i}+v_y\hat{j}$$

Así, podemos expresar el producto escalar haciendo el producto entre los difrentes términos:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(u_x\hat{i}+u_y\hat{j})\cdot(v_x\hat{i}+v_y\hat{j})$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=u_x\cdot v_x\hat{i}\cdot\hat{i}+u_x\cdot v_y\hat{i}\cdot\hat{j}+u_y\cdot v_x\hat{j}\cdot\hat{i}+u_y\cdot v_y\hat{j}\cdot\hat{j}$$

Recuerda: el producto escalar de dos vectores perpendiculares es nulo. Y el producto escalar de un vector consigomo mismo es el cuadrado del módulo del vector.

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=u_x\cdot v_x(\sqrt{1})^2+u_x\cdot v_y\cdot 0+u_y\cdot v_x\cdot 0+u_y\cdot v_y(\sqrt{1})^2$$

$\vec{u}\cdot\vec{v}=u_x\cdot v_x+u_y\cdot v_y\rightarrow$ En tres dimensiones $\rightarrow\ \vec{u}\cdot\vec{v}=u_x\cdot v_x+u_y\cdot v_y+u_z\cdot v_z$

Ángulo formado por dos vectores

Conociendo las componentes de dos vectores, ¿podemos obtener el ángulo que forman?

¡Afirmativo!

Para ello, recordamos las dos ecuaciones que hemos obtenido para el producto escalar:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\alpha)$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=u_x\cdot v_x+u_y\cdot v_y$$

Igualamos ambas expresiones entre sí.

$$|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\alpha)=u_x v_x+u_y v_y$$

Despejamos el coseno del ángulo

$$\cos(\alpha)=\frac{u_x v_x+u_y v_y}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}\rightarrow\alpha=arcocos\frac{u_x v_x+u_y v_y}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}\quad,\ \alpha\in[0^o,180^o]$$

Perpendicularidad y producto escalar

De la definición del producto escalar queda claro que si dos vectores son perpendiculares, su producto escalar es cero.

¿Pero es cierta la afirmación contraria? Es decir, **¿si el producto escalar es cero, implica que los vectores son perpendiculares?**

La respuesta es sí. Demostrémoslo.

De la expresión analítica del producto escalar:

$\vec{u}\cdot\vec{v}=u_x\cdot v_x+u_y\cdot v_y$ → Si lo anulamos → $u_x\cdot v_x+u_y\cdot v_y=0$

$$u_y\cdot v_y=-u_x\cdot v_x \rightarrow \frac{u_y\cdot v_y}{u_x\cdot v_x}=-1 \rightarrow \frac{u_y}{u_x}\cdot\frac{v_y}{v_x}=-1 \rightarrow m_{\vec{u}}\cdot m_{\vec{v}}=-1$$

Donde llegamos a la condición de producto de pendientes igual a -1, que es propio de vectores perpendiculares.

Esta demostración en dos dimensiones se puede generalizar a cualquier dimensión: **producto escalar nulo implica vectores perpendiculares**.

Ejercicios para practicar

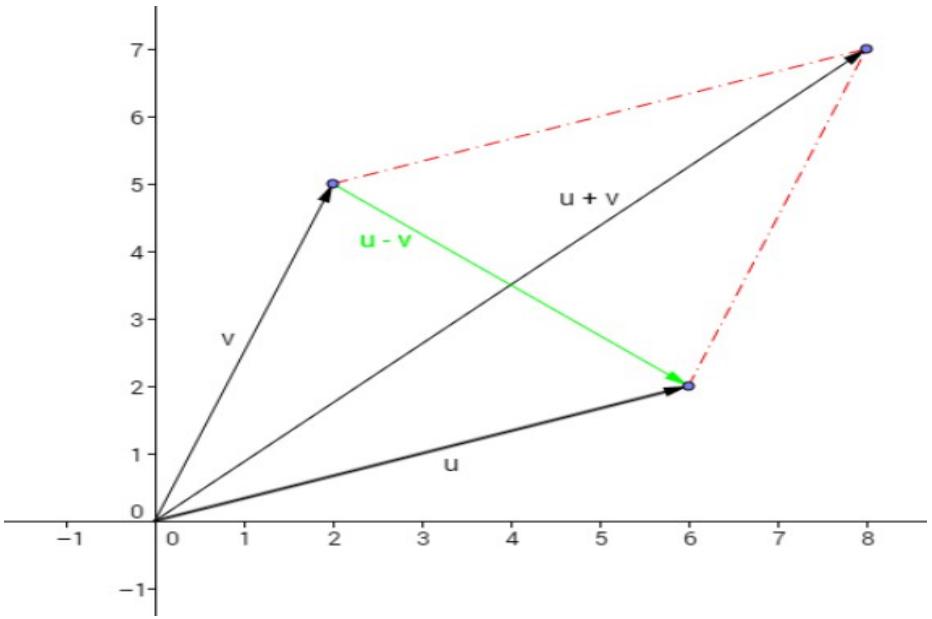
De la Hoja de Problemas del Tema 5, vamos a practicar con los siguientes ejercicios relacionados con la teoría de vectores que hemos visto hasta ahora:

- Hoja 3 – Problemas 4-8
- Hoja 4 – Problemas 3-7

Visión gráfica de la suma y resta de vectores

La suma de dos vectores $\vec{u}+\vec{v}$ es un nuevo vector que coincide con la diagonal del paralelogramo que forman los vectores sumandos.

La resta de dos vectores $\vec{u}-\vec{v}$ es un nuevo vector que coincide con la diagonal menor del paralelogramo que forman los vectores que se restán, con sentido desde el final del vector sustraendo $\vec{v}$ al final del primer vector minuendo $\vec{u}$.



Dimensión de un espacio vectorial

Llamamos espacio vectorial al conjunto de vectores, con la operación suma y la operación producto escalar.

La dimensión del espacio vectorial coincide con el número de componentes de sus vectores.

Es decir, los vectores con dos componentes forman un espacio vectorial de dimesión dos. Los vectores con tres componenes forman un espacio vectorial de dimensión 3... Los vectores con n-componentes forman un espacio vectorial de dimensión n...

Exprear un vector como combinación lineal de otros vectores

Cuando un vector se puede expresar en función de otros vectores, se dice que ese vector es combinación lineal de los otros.

Por ejemplo:

$\vec{u}=(2,3)$, $\vec{v}=(1,-2)$, $\vec{w}=(7,0)$ $\rightarrow$ $\vec{w}=2\cdot\vec{u}+3\cdot\vec{v}$

El vector $\vec{w}=(7,0)$ se puede escribir como dos veces el vector $\vec{u}=(2,3)$ más tres veces el vector $\vec{v}=(1,-2)$. Se dice que $\vec{w}$ es combinación lineal de $\vec{u}\, y\, \vec{v}$.

Otro ejemplo:

$\vec{u}=(1,3,0)$, $\vec{v}=(3,2,1)$, $\vec{w}=(-1,4,-1)$ $\rightarrow$ $\vec{w}=2\cdot\vec{u}-\vec{v}$

El vector $\vec{w}=(-1,4,-1)$ es dos veces el vector $\vec{u}=(1,3,0)$ menos una vez el vector $\vec{v}=(3,2,1)$. Nuevamente, se afirma que $\vec{w}$ es combinación lineal de $\vec{u}\, y\, \vec{v}$.

Obtener los factores de la combinación lineal (parte 1 de 3)

Si me dan un conjunto de vectores, ¿cómo puedo saber si un vector es combinación lineal de ese conjunto de vectores?

Planteando un sistema y resolviéndolo. **Veamos un ejemplo:**

Expresar $\vec{w}=(7,0)$ como combinación lineal de $\vec{u}=(2,3)$ y $\vec{v}=(1,-2)$.

$\vec{w}=a\cdot\vec{u}+b\cdot\vec{v}$ $\rightarrow$ Debo obtener los factores a y b .

$(7,0)=a\cdot(2,3)+b\cdot(1,-2)$ $\rightarrow$ $(7,0)=(2a,3a)+(b,-2b)$

$(7,0)=(2a+b,3a-2b)$

Dos vectores son iguales si sus componente son iguales.

$\begin{cases} 7=2a+b \\ 0=3a-2b \end{cases}$ $\rightarrow$ Resuelvo el sistema $\rightarrow$ $a=2$, $b=3$

Si el sistema es SCD significa que puedo expresar $\vec{w}$ como combinación lineal de $\vec{u}\; y\; \vec{v}$.

Obtener los factores de la combinación lineal (parte 2 de 3)

Veamos otro **ejemplo**:

Expresar $\vec{w}=(7,0)$ como combinación lineal de $\vec{u}=(2,3)$ y $\vec{v}=(-4,-6)$.

$\vec{w}=a\cdot\vec{u}+b\cdot\vec{v}$ $\rightarrow$ Debo obtener los factores a y b .

$(7,0)=a\cdot(2,3)+b\cdot(-4,-6)\rightarrow(7,0)=(2a,3a)+(-4b,-6b)$

$(7,0)=(2a-4b,3a-6b)$

Dos vectores son iguales si sus componente son iguales.

$\begin{Bmatrix}7=2a-4b\\0=3a-6b\end{Bmatrix}$ $\rightarrow$ Resuelvo por reducción $\rightarrow$ $\begin{Bmatrix}-21=-6a+12b\\0=6a-12b\end{Bmatrix}$

Sumamos las ecuaciones $\rightarrow$ $-21=0$ $\rightarrow$ Absurdo matemático

El sistema no tiene solución, es Sistema Incompatible. Significa que no puedo expresar $\vec{w}$ como combinación lineal de $\vec{u}\, y\, \vec{v}$.

En estos ejercicios, no aparecen sistemas SCI con infinitas soluciones.

Obtener los factores de la combinación lineal (parte 3 de 3)

Veamos **otro ejemplo**, ahora con vectores en tres dimensiones.

Expresar $\vec{w}=(7,10,12)$ como combinación lineal de $\vec{u}=(2,3,2)$, $\vec{v}=(0,1,2)$ y $\vec{t}=(3,1,2)$.

$\vec{w}=a\cdot\vec{u}+b\cdot\vec{v}+c\cdot\vec{t}$ → Debo obtener los factores a , b y c .

$$(7,10,12)=a\cdot(2,3,2)+b\cdot(0,1,2)+c\cdot(3,1,2)$$

$$(7,10,12)=(2a,3a,2a)+(0,b,2b)+(3c,c,2c)$$

$$(7,10,12)=(2a+3c,3a+b+c,2a+2b+2c)$$

Dos vectores son iguales si sus componente son iguales. Así, obtenemos un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas.

$$\left\{\begin{matrix} 7=2a+3c \\ 10=3a+b+c \\ 12=2a+2b+2c \end{matrix}\right\} \rightarrow \text{Resolvemos} \rightarrow \; a=2,\, b=3,\, c=1$$

Al ser SCD, significa que $\vec{w}$ es combinación lineal de $\vec{u},\vec{v},\vec{t}$

Sistema generador (parte 1 de 3)

En el apartado anterior hemos visto ejemplos de un vector que se puede escribir como combinación lineal de otro conjunto de vectores; y ejemplos de un vector que no se puede expresar como combinación lineal de otro conjunto de vectores.

La siguente pregunta es: **¿Existe un conjunto de vectores que permita expresar cualquier vector como combinación lineal respecto a ese conjunto?**

La respues es sí. Y hay infinitos conjuntos de vectores que cumplen esta condición. A cada uno de estos conjuntos se les llama **sistema generador**.

Sistema generador (parte 2 de 3)

Ejemplo:

¿Forman los vectores $\vec{u}=(2,3)$ y $\vec{v}=(1,-2)$ un sistema generador en dos dimensiones? Para ello escribimos un vector arbitrario (x,y) como combinación lineal de esos dos vectores:

$$(x,y)=a(2,3)+b(1,-2) \rightarrow (x,y)=(2a+b,3a-2b)$$

Igualamos componentes $\rightarrow \begin{Bmatrix} x=2a+b \\ y=3a-2b \end{Bmatrix}$

En este sistema, las incógnitas son a y b . Si conseguimos despejarlas en función de x,y , significa que tenemos solución única (SCD) y los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son sistema generador.

Resolvemos $\rightarrow \begin{Bmatrix} x=2a+b \\ y=3a-2b \end{Bmatrix} \rightarrow a=\frac{2}{7}x+\frac{1}{7}y$, $b=\frac{3}{7}x-\frac{2}{7}y$

Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sí son sistema generador.

Sistema generador (parte 3 de 3)

Ejemplo:

¿Forman los vectores $\vec{u}=(2,3)$ y $\vec{v}=(4,6)$ un sistema generador en dos dimensiones? Para ello escribimos un vector arbitrario (x,y) como combinación lineal de esos dos vectores:

$$(x,y)=a(2,3)+b(4,6) \rightarrow (x,y)=(2a+4b,3a+6b)$$

Igualamos componentes $\rightarrow \begin{cases} x=2a+4b \\ y=3a+6b \end{cases}$

Resolvemos. Recuerda que las incógnitas son a y b , mientras que x y y son cualquier número arbitraro que pueda imaginar.

Al resolver $\rightarrow$ $3x-2y=0$ $\rightarrow$ Sólo los vectores (x,y) que cumplan esa condición se pueden expresar como combinación lineal. Por lo tanto, los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no son sistema generador.

Rango de un conjunto de vectores

Dado un conjunto de vectores, si los escribimos en filas o en columnas formando una matriz, y **aplicamos el método de Gauss** haciendo ceros por debajo o por encima de la diagonal principal, **el rango coincide con el número de vectores no nulos**.

Ejemplos:

Calcula el rango de:

a) $\vec{u}=(2,3)$ y $\vec{v}=(1,-2)$

b) $\vec{u}=(2,3)$ y $\vec{v}=(4,6)$

c) $\vec{u}=(1,0,1)$, $\vec{v}=(4,6,0)$ y $\vec{w}=(-3,2,1)$

d) $\vec{u}=(1,0,1)$, $\vec{v}=(4,6,0)$ y $\vec{w}=(5,6,1)$

Rango y sistema generador

Dado un conjunto de vectores en un espacio vectorial de dimensión n, formarán un sistema generador si su rango es igual a n.

Ejemplos:

Utilizando los resultados del ejemplo anterior, decide si los siguientes conjuntos de vectores son un sistema generador:

a) $\vec{u}=(2,3)$ y $\vec{v}=(1,-2)$

b) $\vec{u}=(2,3)$ y $\vec{v}=(4,6)$

c) $\vec{u}=(1,0,1)$, $\vec{v}=(4,6,0)$ y $\vec{w}=(-3,2,1)$

d) $\vec{u}=(1,0,1)$, $\vec{v}=(4,6,0)$ y $\vec{w}=(5,6,1)$

Vectores linealmente independientes y vectores linealmente dependientes

Un conjunto de n-vectores son linealmente independientes si su rango es igual a n. En este caso, no existe combinación lineal de ninguno de sus vectores respecto del resto.

Un conjunto de n-vectores son linealmente dependientes si su rango es inferior a n. En este caso, sí existe combinación lineal de al menos uno de sus vectores respecto del resto.

Base (parte 1 de 2)

En un espacio vectorial de dimensión n, ¿cuántos sistemas generadores hay? Infinitos.

¿Existen algunos sistemas generadores especialmente importantes?

Sí, aquellos que cuenten con el menor número de vectores posibles.

¿Cómo se llaman estos sistemas generador formados por el menor número de vectores posibles?

Base.

En otras palabras, **una base es un sistema generador que además es linealmente independiente**.

¿Cuántos vectores tienen las bases en dos dimensiones? Dos.

¿Cuántos vectores tienen las bases en tres dimensiones? Tres.

Conclusión: **Una base en un espacio vectorial de dimensión n está formada por n-vectores con rango n**.

Base (parte 2 de 2)

Ejemplos:

¿Forman una base los siguientes conjuntos de vectores?

a) $\vec{u}=(2,3)$ y $\vec{v}=(1,-2)$

b) $\vec{u}=(2,3)$ y $\vec{v}=(4,6)$

c) $\vec{u}=(2,3)$, $\vec{v}=(-8,2)$, $\vec{w}=(0,1)$

d) $\vec{u}=(1,0,1)$, $\vec{v}=(4,6,0)$ y $\vec{w}=(-3,2,1)$

e) $\vec{u}=(1,0,1)$, $\vec{v}=(4,6,0)$ y $\vec{w}=(5,6,1)$

f) $\vec{u}=(1,0,1)$, $\vec{v}=(4,6,0)$, $\vec{w}=(-3,2,1)$, $\vec{t}=(0,1,2)$

Base ortogonal, ortonormal y canónica

Una base es ortogonal si todos los vectores que forman la base son perpendiculares entre sí.

Una base es ortonormal si es ortogonal y, además, los vectores que forman la base son de módulo unidad.

La base canónica es una base ortonormal formal por los vectores unitarios paralelos a los ejes: en dos dimensiones $\hat{i}=(1,0),\hat{j}=(0,1)$; y en tres dimensiones $\hat{i}=(1,0,0),\hat{j}=(0,1,0),\hat{k}=(0,0,1)$.

Recuerda: la forma más sencilla de comprobar si dos vectores son perpendiculares, es comprobar que su producto escalar es nulo.

Rango en función de un parámetro

Dado un conjunto de vectores, con un parámetro en al menos una de las componentes de un vector, podemos determinar el rango del conjunto de vectores aplicando Gauss a la matriz formada por los vectores y haciendo una discusión de casos en función de los coeficientes de la diagonal principal que contienen al parámetro.

Un conjunto de vectores nunca podrá tener un rango mayor que la dimensión del espacio vectorial. Es decir, un conjunto de vectores de dos dimensiones nunca podrán tener un rango mayor que dos. Un conjunto de vectores de tres dimensiones nunca podrán tener un rango mayor que tres.

Ejemplos:

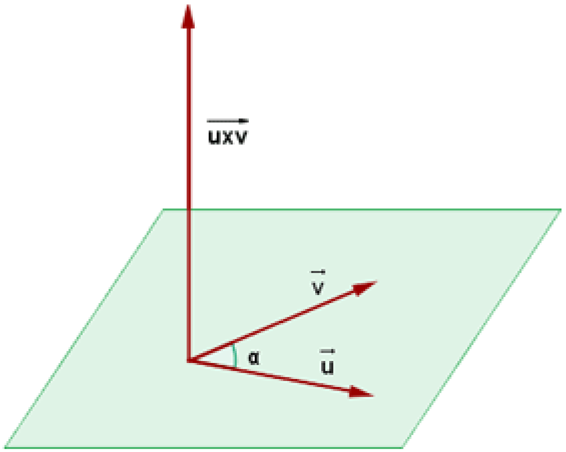
Estudiar el rango de los siguientes vectores en función de k :

a) $\vec{u}=(1,7)$, $\vec{v}=(k,-10)$

b) $\vec{u}=(1,0,1)$, $\vec{v}=(4,6,0)$ y $\vec{w}=(5,6,k)$

Introducción al producto vectorial en tres dimensiones

El producto vectorial en tres dimensioes da como resultado otro vector perpendicular al plano que forman los vectores que se multiplican. Con el sentido marcado por la regla de la mano derecha.



Se simboliza → $\vec{u} \times \vec{v}$

En 1ºBach solo nos vamos a centrar en obtener el módulo del vector resultante del producto vectorial.

Su módulo es igual al producto de los módulos de los vectores de inicio por el seno del ángulo que forman.

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot sen(\alpha)$$

Aplicaciones:

Área de un parelelogramo → $A_{paralelogramo} = |\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot sen(\alpha)$

Área de un triángulo → $A_{triángulo} = \frac{1}{2} |\vec{u} \times \vec{v}| = \frac{1}{2} |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot sen(\alpha)$