Teoría – Tema 5

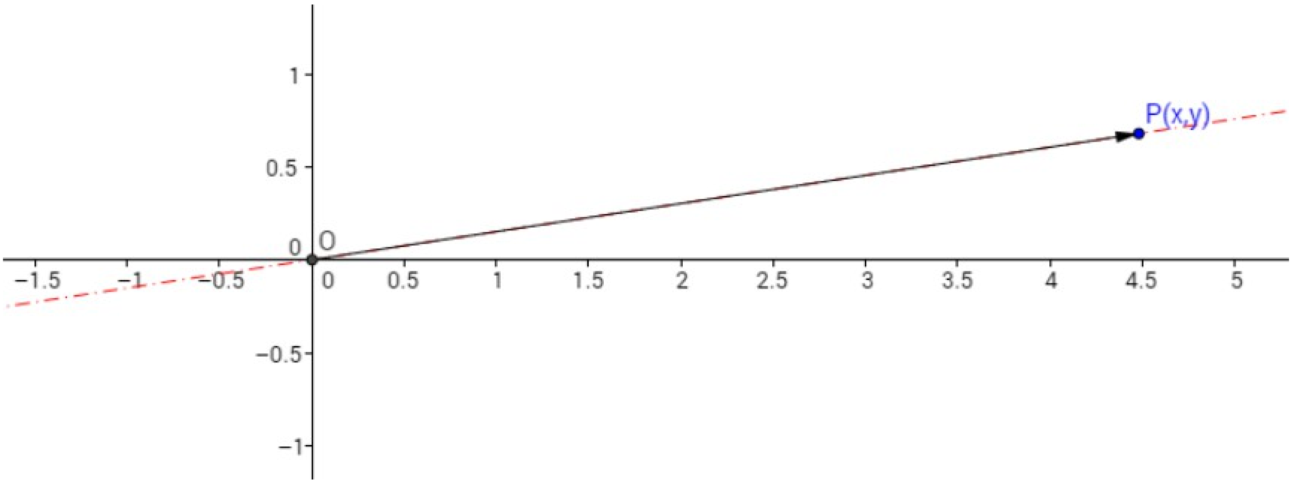
Dirección, sentido y módulo de un vector. Normalización

Índice de contenido

Un ejemplo en 2 dimensiones

Sea un vector $\vec{u}=(x,y)$ del espacio bidimensional. Su representante canónico es el vector que nace en el origen $(0,0)$ del sistema de referencia y termina en el punto $P(x,y)$.

$representante\ \ canónico\ \ del\ \ vector\ \ \vec{u}=(x,y)$



La dirección del vector $\vec{u}=(x,y)$ es la marcada por la recta que une sus dos extremos (indicada en rojo en la gráfica superior). Dos rectas paralelas indican la misma dirección.

El sentido del vector viene indicado por la flecha de su extremo final. Esta fecha siempre apunta del origen al final (en la gráfica superior, el sentido va del punto $O(0,0)$ al punto $P(x,y)$).

El módulo es la longitud del vector. Este módulo suele representarse con las barras de valor absoluto $|\vec{u}|$. Si desde el extremo $P(x,y)$ proyectamos perpendicularmente sobre el eje horizontal, tendremos un triángulo rectángulo de altura y y base x . Aplicando el teorema de Pitágoras:

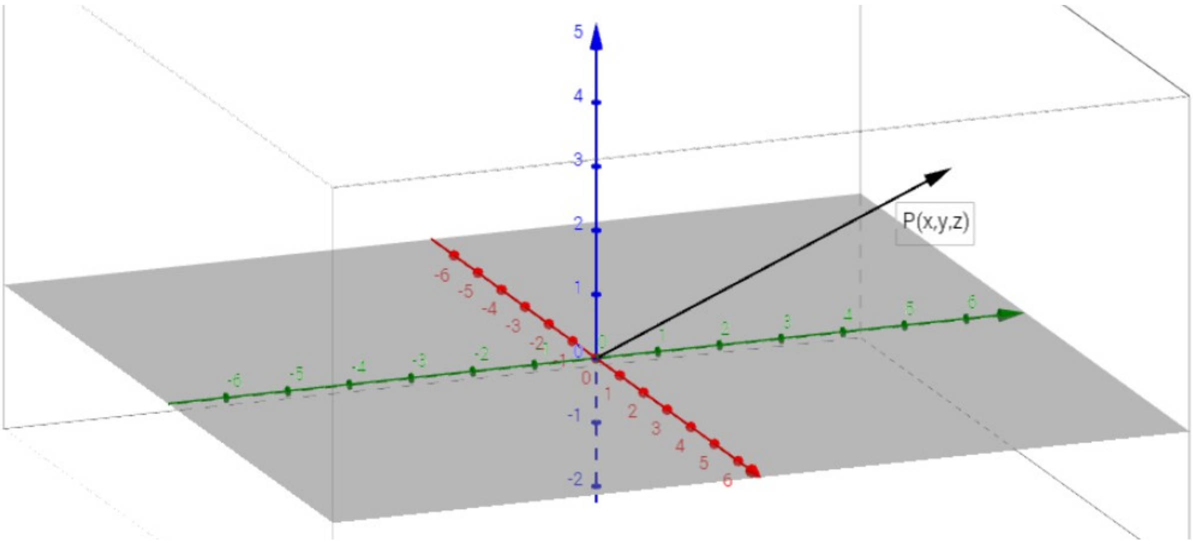
$$módulo\equiv|\vec{u}|=\sqrt{x^2+y^2}$$

Un ejemplo en 3 dimensiones

Vamos a extender las definiciones del anterior apartado a tres dimensiones. En general, podemos hacerlo para n-dimensiones.

Sea un vector $\vec{u}=(x,y,z)$ del espacio tridimensional. Su representante canónico es el vector que nace en el origen $(0,0,0)$ del sistema de referencia y termina en el punto $P(x,y,z)$.

$$representante \quad canónico \quad del \quad vector \quad \vec{u}=(x,y,z)$$



La dirección del vector $\vec{u}=(x,y,z)$ es la marcada por la recta que une sus dos extremos .

El sentido del vector apunta del origen al final (en la gráfica superior, el sentido va del punto $O(0,0,0)$ al punto $P(x,y,z)$).

El módulo es la longitud del vector, que en tres dimensiones resulta una expresión análoga a la de dos dimensiones:

$$módulo \equiv |\vec{u}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Vector unitario. Normalización

Un vector $\vec{u}$ es unitario si **su módulo es la unidad** <==> $|\vec{u}|=1$

Si en un vector arbitrario $\vec{u}$ no unitario, dividimos cada componente por su módulo, el resultado es un nuevo vector con la misma dirección y sentido que $\vec{u}$ pero de módulo unidad. A este proceso se le denomina **normalización de un vector**.

Es costumbre representar los vectores unitarios de la forma $\hat{u}$, en vez de con la flecha tradicional de vector.

Ejemplo

Normalizar el vector $\vec{u}=(\frac{1}{2},3)$.

El módulo de este vector es $|\vec{u}|=\sqrt{(\frac{1}{2})^2+3^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+9}=\sqrt{\frac{37}{4}}=\frac{\sqrt{37}}{2}$

Su vector unitario asociado será:

$$\hat{u}=\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}=\frac{(\frac{1}{2},3)}{\frac{\sqrt{37}}{2}}=(\frac{1}{\sqrt{37}},\frac{6}{\sqrt{37}})$$

Es fácil comprobar que el módulo de este vector es la unidad:

$$|\hat{u}|=\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{37}}\right)^2+\left(\frac{6}{\sqrt{37}}\right)^2}=\sqrt{\frac{37}{37}}=1$$