Teoría – Tema 5

Espacios vectoriales

Índice de contenido

Puntos en 2 y 3 dimensiones

Ya conocemos el **cuerpo de los números reales** $(\mathbb{R},+,\cdot)$, donde definimos dos propiedades internas: la suma y el producto. Los elementos de este cuerpo los representamos en la recta real unidimensional.

También conocemos el **cuerpo de los números complejos** $(\mathbb{Z},+,\cdot)$, que posee una suma y un producto como operaciones internas. Los elementos complejos no se representan en una recta, sino en el plano complejo bidimensional, ya que son un par de valores (a,b) .

Dentro de los complejos hemos hablado de vectores, como los segmentos orientados que unen el origen del plano complejo $(0,0)$ con el afijo $z=(a,b)$. Y sabemos que el módulo de un complejo es la longitud de su vector, y que el ángulo que forma con el semieje positivo real es su fase.

Pues bien, esta experiencia previa nos ayudará a comprender el **concepto de punto y de espacio vectorial**.

Si trabajamos en **dos dimensiones**, un punto P tendrá dos coordenadas (a,b) . Donde la primera coordenada a está asociada a la primera dimensión (que suele identificarse con el eje horizontal OX), y la segunda coordenada b está asociada a la segunda dimensión (que suele identificarse con el eje horizontal OY).

Tanto el eje OX como el eje OY son perpendiculares entre si, formando lo que se conoce como **sistema cartesiano**. Por eso, la pareja de valores (a,b) también se denomina producto cartesiano $\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\{(a,b)/a,b\in\mathbb{R}\}$.

Si hablamos de **tres dimensiones**, añadimos una tercera coordenada a los puntos: (a,b,c) . Esta tercera coordenada suele asociarse a un eje OZ perpendicular a los otros dos. Y se habla del conjunto $\mathbb{R}^3=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\{(a,b,c)/a,b,c\in\mathbb{R}\}$.

Por lo general podemos hablar de **n-dimensiones**, de tal forma que un punto vendrá representado por n-coordenadas $(a,b,c,....,n)$. Y tendremos el conjunto $\mathbb{R}^n=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\{(a,b,c,...,n)/a,b,c,...,n\in\mathbb{R}\}$

En bachillerato trabajaremos, por lo general, en dos y tres dimensiones. Por lo que vamos a centrar nuestro estudio a $\mathbb{R}^2$ y a $\mathbb{R}^3$.

Dos puntos son iguales si sus componentes son iguales y están en el mismo orden.

$(a,b),(c,d)\in\mathbb{R}^2$

$(a,b)=(c,d)$ <==> $a=c,b=d$

Si hablamos de igualdad de puntos en $\mathbb{R}^3$, solo deberemos ampliar la igualdad a la tercera componente.

Vamos a definir una operación interna para los puntos: la suma. Es una operación interna, como ya sabemos, porque el resultado final pertenece al mismo cuerpo al que pertenecen los sumandos. Es decir, la suma de dos puntos genera un nuevo punto.

Suma de elementos de R²

$(a,b),(c,d)\in\mathbb{R}^2$

$(a,b)+(c,d)=(a+b,c+d)\in\mathbb{R}^2$

Esta suma es:

- **Asociativa**.
- **Conmutativa**.
- Posee **elemento neutro** $(0,0)$.
- Posee **elemento simétrico** $(-a,-b)$, que al sumarlo al punto (a,b) da lugar al elemento neutro. El elemento simétrico de la suma es el elemento opuesto.

Con esto, decimos que $(\mathbb{R}^2,+)$ tiene estructura matemática de **grupo abeliano**. En $\mathbb{R}^3$ la suma cumple las mismas propiedades, añadiendo la tercera coordenada a nuestro razonamiento.

Consideremos ahora el producto de números reales del cuerpo $\mathbb{R}$ (una dimensión). Vamos a aplicar este producto a la pareja de valores de $\mathbb{R}^2$. Y llamaremos **escalares** a los números reales que se multiplican sobre los **pares ordenados** de $\mathbb{R}^2$.

Producto de escalar por par ordenado

$k\in\mathbb{R}$ $\rightarrow$ escalar

$(a,b)\in\mathbb{R}^2$ $\rightarrow$ par ordenador

$k\cdot(a,b)=(k\cdot a,k\cdot b)\in\mathbb{R}^2$

Esta multiplicación cumple las siguientes propiedades:

- Propiedad distributiva del producto de escalares respecto a la suma de pares ordenados.

$$k \in \mathbb{R}$$
$$(a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2$$
$$k \cdot [(a,b)+(c,d)] = k \cdot (a,b) + k \cdot (c,d)$$

- Propiedad distributiva de la suma de escalares respecto del producto por un par ordenador.

$$k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$
$$(a,b) \in \mathbb{R}^2$$
$$(k_1+k_2) \cdot (a,b) = k_1 \cdot (a,b) + k_2 \cdot (a,b)$$

- Propiedad asociativa mixta.

$$k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$
$$(a,b) \in \mathbb{R}^2$$
$$k_1 \cdot [k_2 \cdot (a,b)] = (k_1 \cdot k_2) \cdot (a,b)$$

- Elemento neutro para el producto de un escalar por un par ordenador.

$$1 \in \mathbb{R}$$
$$(a,b) \in \mathbb{R}^2$$
$$1 \cdot (a,b) = (1 \cdot a, 1 \cdot b) = (a,b)$$

Con estas definiciones y propiedades se afirma que $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ tiene estructura matemática de **espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales.** Donde $+$ indica la suma pares ordenados y $\cdot$ el producto de un escalar por un par ordenado.

Análogamente, se afirma lo mismo para $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$. Y en general, para $(\mathbb{R}^n,+,\cdot)$.

Vectores en el plano

El paso del par ordenado de los puntos de $\mathbb{R}^2$ al concepto de vector en el plano es inmediato.

Definición de vector

Dados dos puntos A y B , llamamos vector $\vec{AB}$ al segmento orientado que va del punto A al punto B . Al punto A se le llama **origen** del vector, y al punto B **extremo**.

El **módulo** del vector es la longitud del segmento determinado por los puntos origen y extremo.

La **dirección** es la recta que une los puntos origen y extremo, y la de sus rectas paralelas.

El **sentido** es el del recorrido desde el origen al extremo.

Conocidos los puntos origen y extremo de un vector, conocemos de manera única las componentes del vector.

Componentes del vector

Dados dos puntos $A(a_x, a_y)$ y $B(b_x, b_y)$, la coordenada horizontal y vertical del vector $\vec{AB}$ vienen dadas por:

$x=b_x-a_x$

$y=b_y-a_y$

$\vec{AB}=(x,y)$

Si trabajamos en tres dimensiones, tendremos un vector $\vec{AB}=(x,y,z)$, donde $z=b_z-a_z$.

Vectores equipolentes

Dos vectores son equipolentes si tiene el mismo módulo, dirección y sentido.

Dos vectores equipolentes pueden estar distribuidos por cualquier zona del plano.

Por ejemplo, los puntos $A(2,4)$ y $B(6,10)$ generan el vector $\vec{AB}=(6-2,10-4)=(4,6)$. A su vez, los puntos $C(5,7)$ y $D(9,11)$ generan el vector $\vec{CD}=(9-5,11-7)=(4,6)$. Los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{CD}$ con equipolentes, el primero con origen en el punto A y el segundo con origen en el punto C . Y así, habrá infinitos vectores equipolentes a $\vec{AB}$ y a $\vec{CD}$ (uno por cada punto del plano que sea origen del vector).

Al conjunto formado por un vector y sus infinitos equipolentes, se le llama **vector libre**. Y al representante único de un vector libre que tiene su origen en el origen de coordenadas $O(0,0)$ lo llamamos **representante canónico** de dicho vector.

En nuestro ejemplo el representante canónico sería el vector con origen el punto $O(0,0)$ y extremo $P(4,6)$, que genera el vector $\vec{OP}=(4-0,6-0)=(4,6)$.

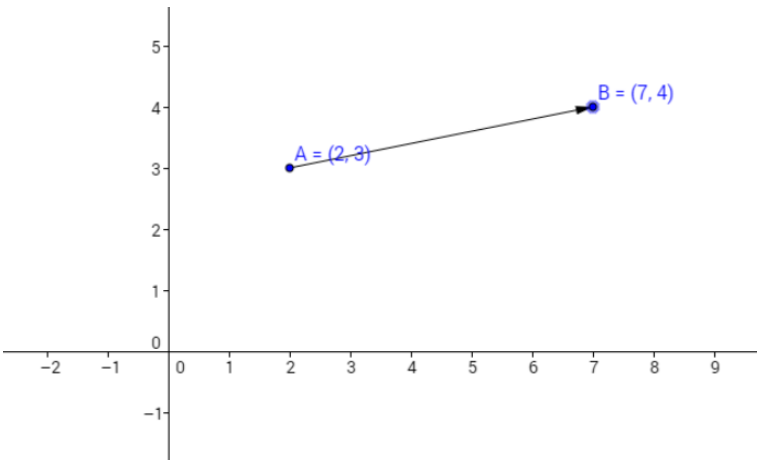
Nomenclatura

Si conocemos el punto origen $A(a_x,a_y)$ y el punto extremo $B(b_x,b_y)$ de un vector, lo representamos como $\vec{AB}=(x,y)$, de coordenadas $x=b_x-a_x$, $y=b_y-a_y$.

Otra opción sería representar el vector con una **letra minúscula**: $\vec{u}=(x,y)$. En este caso asumimos que trabajamos con el representante canónico del vector, con origen el punto $O(0,0)$ y extremo $P=(x,y)$, de tal forma que $\vec{u}=\vec{OP}=(x-0,y-0)=(x,y)$.

Si al trabajar con el par ordenado $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ decíamos que $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ forma un espacio vectorial, ahora diremos lo mismo para los vectores. Estos vectores formarán el espacio vectorial $(V^2,+,\cdot)$. Los elementos de V^2 ya no son un par ordenado, sino vectores. Es decir, $\vec{u}\in V^2$.

$$vector\ \ \vec{AB}\ \ con\ \ origen\ \ A(2,3)\ \ y\ \ extremo\ \ B(7,4)$$



Suma de vectores

Dados dos vectores $\vec{u}=(a,b),\vec{v}=(c,d)\in V^2$, definimos la suma y la diferencia de vectores de la forma:

$$\vec{u}+\vec{v}=(a+c\,,b+d)$$
$$\vec{u}-\vec{v}=(a-c\,,b-d)$$

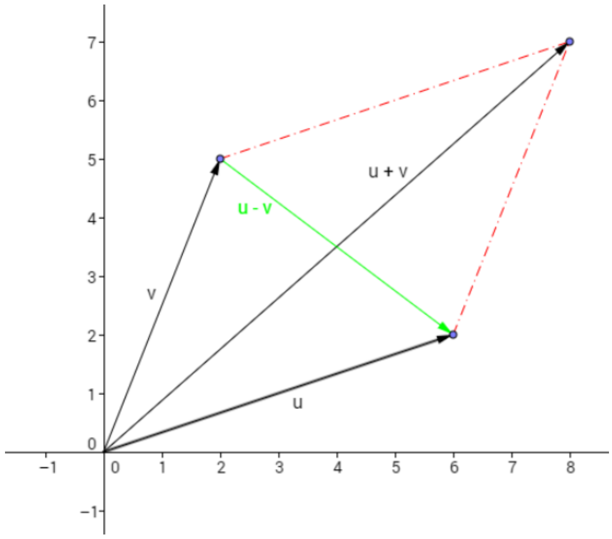
El resultado de estas operaciones es un nuevo elemento del espacio vectorial V^2 , por eso la suma de vectores es una operación interna del espacio vectorial.

La diferencia de vectores también podemos verla como la suma del primer vector más el opuesto del segundo.

¿Cómo entender **gráficamente** la suma y la diferencia de vectores?

Si trazamos paralelas por los extremos finales de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ para formar un paralelogramo, la suma es la diagonal mayor del paralelogramo. Y la resta es la diagonal menor.

suma y diferencia de vectores



En tres dimensiones los vectores $\vec{u}=(x_1,y_1,z_1),\vec{v}=(x_2,y_2,z_2)\in V^2$ se suman y restan:

$$\vec{u}+\vec{v}=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)$$
$$\vec{u}-\vec{v}=(x_1-x_2,y_1-y_2,z_1-z_2)$$

Combinación lineal de vectores

Sea el vector $\vec{u} \in V^2$. Decimos que es **combinación lineal** de otros dos vectores $\vec{v}, \vec{w} \in V^2$ si podemos expresar $\vec{u}$ de la forma:

$$\vec{u} = \alpha \cdot \vec{v} + \beta \cdot \vec{w}$$

Ejemplo

¿Podemos expresar $\vec{u} = (3,5)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{v} = (1,2)$ y $\vec{w} = (-2,3)$?

Planteamos la definición de combinación lineal:

$$(3,5) = \alpha \cdot (1,2) + \beta \cdot (-2,3) \rightarrow (3,5) = (\alpha, 2 \cdot \alpha) + (-2 \cdot \beta, 3 \cdot \beta) \rightarrow (3,5) = (\alpha - 2 \cdot \beta, 2 \cdot \alpha + 3 \cdot \beta)$$

Igualamos componentes (primera coordenada igual a primera coordenada, segunda coordenada igual a segunda coordenada):

$$\begin{Bmatrix} 3 = \alpha - 2 \cdot \beta \\ 5 = 2 \cdot \alpha + 3 \cdot \beta \end{Bmatrix}$$

Obteniendo un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas que debemos resolver.

De la primera ecuación del sistema podemos despejar $\alpha \rightarrow \alpha = 3 + 2 \cdot \beta \rightarrow$ Y sustituimos en la segunda ecuación:

$$5 = 2 \cdot \alpha + 3 \cdot \beta \rightarrow 5 = 2 \cdot (3 + 2 \cdot \beta) + 3 \cdot \beta \rightarrow 5 = 6 + 4 \cdot \beta + 3 \cdot \beta \rightarrow -1 = 7 \cdot \beta \rightarrow \beta = \frac{-1}{7}$$

Con el valor de β obtenemos $\alpha \rightarrow \alpha = 3 + 2 \cdot \beta \rightarrow \alpha = 3 + 2 \cdot \left(\frac{-1}{7} \right) \rightarrow \alpha = \frac{19}{7}$

Podemos expresar $\vec{u} = (3,5)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{v} = (1,2)$ y $\vec{w} = (-2,3)$.

$$(3,5) = \frac{19}{7} \cdot (1,2) + \frac{-1}{7} \cdot (-2,3)$$

Si extendemos esta definición a tres dimensiones, tendremos por lo general una terna de tres vectores:

$$\vec{u} = \alpha \cdot \vec{v} + \beta \cdot \vec{w} + \gamma \cdot \vec{t}$$

Ejemplo

¿Podemos expresar $\vec{u}=(-2,1,1)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{v}=(1,0,0)$, $\vec{w}=(0,1,0)$ y $\vec{t}=(0,0,1)$?

Planteamos la definición de combinación lineal:

$$(-2,1,1)=\alpha\cdot(1,0,0)+\beta\cdot(0,1,0)+\gamma(0,0,1) \;\rightarrow\; (-2,1,1)=(\alpha,\beta,\gamma)$$

Igualamos componentes (primera coordenada igual a primera coordenada, segunda coordenada igual a segunda coordenada, tercera coordenada igual a tercera coordenada):

$$\left\{\begin{array}{c}-2=\alpha\\1=\beta\\1=\gamma\end{array}\right\}$$

Obteniendo un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas, cuya solución es directa.

Podemos expresar $\vec{u}=(-2,1,1)$ como combinación lineal de de los vectores $\vec{v}=(1,0,0)$, $\vec{w}=(0,1,0)$ y $\vec{t}=(0,0,1)$.

$$(-2,1,1)=.2\cdot(1,0,0)+(0,1,0)+(0,0,1)$$

El concepto de combinación lineal podemos extenderlo a un conjunto de cuatro, cinco, seis,... o n-vectores.

Sistema generador

Un conjunto de vectores se dice que es un **sistema generador** de los vectores del espacio vectorial al que pertenecen, si cualquier vector de dicho espacio puede expresarse como combinación lineal de ese conjunto de vectores.

En dos dimensiones, diremos que el conjunto formado por $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son un sistema generador en V^2 si para cualquier vector $\vec{u}=(x,y)\in V^2$ se cumple:

$$(x,y)=\alpha\cdot\vec{v}+\beta\cdot\vec{w}$$

En tres dimensiones, diremos que el conjunto formado por $\vec{v}$, $\vec{w}$ y $\vec{t}$ son un sistema generador en V^3 si para cualquier vector $\vec{u}=(x,y,z)\in V^3$ se cumple:

$$(x,y,z)=\alpha\cdot\vec{v}+\beta\cdot\vec{w}+\gamma\cdot\vec{t}$$

En general, para un sistema generador en V^n necesitaremos al menos n-vectores.

Ejemplo

¿Forman los vectores $\vec{v}=(1,1)$ y $\vec{w}=(2,-3)$ un sistema generador en V^2 ?

Planteamos la definición de sistema generador:

$$(x,y)=\alpha\cdot(1,1)+\beta\cdot(2,-3) \rightarrow (x,y)=(\alpha+2\cdot\beta,\alpha-3\cdot\beta)$$

Igualamos componentes y tenemos un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (las incógnitas son los parámetros α y β).

$$\begin{Bmatrix} x=\alpha+2\cdot\beta \\ y=\alpha-3\cdot\beta \end{Bmatrix}$$

Si restamos ambas ecuaciones podemos obtener el valor del parámetro β en función de x , y .

$$x-y=5\cdot\beta \rightarrow \beta=\frac{x-y}{5}$$

Y el valor de α resulta:

$$x=\alpha+2\cdot\frac{x-y}{5} \rightarrow \alpha=\frac{3x+2y}{5}$$

Es decir, dado un vector arbitrario $\vec{u}=(x,y)$ siempre podemos expresarlo en función del sistema generador $\vec{v}=(1,1)$ y $\vec{w}=(2,-3)$ a partir de los valores de α y β .

Ejemplo

¿Forman los vectores $\vec{v}=(1,1,0)$, $\vec{w}=(2,-3,0)$ y $\vec{t}=(-1,4,0)$ un sistema generador en V^3 ?

Planteamos la definición de sistema generador:

$$(x,y,z)=\alpha\cdot(1,1,0)+\beta\cdot(2,-3,0)+\gamma(-1,4,0) \rightarrow (x,y,z)=(\alpha+2\cdot\beta-\gamma,\alpha-3\cdot\beta+4\cdot\gamma,0)$$

Igualamos componentes y tenemos un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas (las incógnitas son los parámetros α , β y γ).

$$\left\{\begin{array}{c} x=\alpha+2\cdot\beta-\gamma \\ y=\alpha-3\cdot\beta+4\cdot\gamma \\ z=0 \end{array}\right\}$$

Si expresamos matricialmente el sistema (recordamos que las incógnitas son los parámetros α , β y γ).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & x \\ 1 & -3 & 4 & y \\ 0 & 0 & 0 & z \end{array}\right)$$

La última fila muestra una incongruencia: $0=z$. ¿Por qué es una incongruencia? Porque estamos trabajando con un vector arbitrario $\vec{u}=(x,y,z)$, y lógicamente z puede tomar cualquier valor... no solo el valor 0 .

Por lo tanto, debido a esta incongruencia o absurdo matemático, nuestro sistema no tiene solución. Es decir, los vectores $\vec{v}=(1,1,0)$, $\vec{w}=(2,-3,0)$ y $\vec{t}=(-1,4,0)$ no forman un sistema generador en V^3 .

Vectores linealmente dependientes o sistema ligado

Un conjunto de vectores $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$,..., $\vec{u}_n$ de un espacio vectorial son **linealmente dependientes** si cumplen:

$\alpha\cdot\vec{u}_1+\beta\cdot\vec{u}_2+\gamma\cdot\vec{u}_3+...+\delta\cdot\vec{u}_n=\vec{0}$ → con al menos un coeficiente $\alpha,\beta,\gamma,...,\delta$ no nulo.

A un sistema de vectores linealmente dependientes se le denomina **sistema ligado de vectores o en combinación lineal**. El factor $\vec{0}$ indica el vector nulo.

Ejemplo

¿Son los vectores $\vec{v}=(1,1)$ y $\vec{w}=(2,-3)$ linealmente dependientes en V^2 ?

Planteamos la definición de dependencia lineal:

$\alpha\cdot(1,1)+\beta\cdot(2,-3)=\vec{0} \rightarrow (\alpha+2\cdot\beta,\alpha-3\cdot\beta)=(0,0)$

Igualamos componentes y tenemos un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (las incógnitas son los parámetros α y β).

$$\begin{Bmatrix}\alpha+2\cdot\beta=0\\ \alpha-3\cdot\beta=0\end{Bmatrix}$$

Y este sistema tiene como solución única $\alpha=0$ y $\beta=0$. Por lo tanto, los vectores $\vec{v}=(1,1)$ y $\vec{w}=(2,-3)$ no son linealmente dependientes.

Ejemplo

¿Son los vectores $\vec{v}=(1,1)$, $\vec{w}=(2,-3)$ y $\vec{t}=(-1,0)$ linealmente dependientes ?

Planteamos la definición de dependencia lineal:

$\alpha\cdot(1,1)+\beta\cdot(2,-3)+\gamma\cdot(-1,0)=\vec{0} \rightarrow (\alpha+2\cdot\beta-\gamma,\alpha-3\cdot\beta)=(0,0)$

Llegamos a un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas con infinitas soluciones.

$$\begin{Bmatrix}\alpha+2\cdot\beta-\gamma=0\\ \alpha-3\cdot\beta=0\end{Bmatrix}$$

De la segunda ecuación despejamos el valor de $\alpha \rightarrow \alpha=3\cdot\beta$

Y llevamos este valor a la primera ecuación → $3\cdot\beta+2\cdot\beta-\gamma=0 \rightarrow 5\cdot\beta=\gamma$

Llegamos a una ecuación con dos incógnitas → una de esas incógnitas será un parámetro arbitrario no nulo → por ejemplo $\gamma=1 \rightarrow \beta=\frac{1}{5} \rightarrow \alpha=\frac{3}{5}$ → Los vectores son linealmente dependientes.

Vectores linealmente independientes o sistema libre

Un conjunto de vectores $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$,..., $\vec{u}_n$ de un espacio vectorial son **linealmente independientes** si se cumple:

$\alpha\cdot\vec{u}_1+\beta\cdot\vec{u}_2+\gamma\cdot\vec{u}_3+...+\delta\cdot\vec{u}_n=\vec{0}$ → con $\alpha=\beta=\gamma=...=\delta=0$ → Todos los coeficientes nulos.

A un sistema de vectores linealmente independientes se le denomina **sistema libre vectores o sin combinación lineal**. El factor $\vec{0}$ indica el vector nulo.

Para practicar...

Comprobar que los vectores $\vec{v}=(1,0,0)$, $\vec{w}=(0,1,0)$ y $\vec{t}=(0,0,1)$ son un sistema libre de vectores en V^3 .

Método directo para comprobar si dos vectores son proporcionales (dependientes) o no proporcionales (independientes)

En muchos ejercicios de este tema y de temas siguientes, nos darán dos vectores para comprobar si son dependientes o independientes.

En vez de aplicar la definición formal de dependencia lineal, podemos hacer uso del siguiente razonamiento (valido para cualquier dimensión).

Sea $\vec{u}=(u_x, u_y, u_z)$ y $\vec{v}=(v_x, v_y, v_z)$ dos vectores en 3 dimensiones (repito, pueden ser de cualquier dimensión). Ambos vectores son dependientes (proporcionales) si se cumple:

$\frac{u_x}{v_x}=\frac{u_y}{v_y}=\frac{u_z}{v_z}$ → Si los cocientes son iguales, los vectores son proporcionales

Es decir, **si el cociente de sus componentes es constante los vectores son dependientes (proporcionales). Si la igualdad no se cumple en alguno de los cocientes los vectores son independientes (no proporcionales)**.

Recuerda. Este práctico método sive solo para estudiar la dependencia de dos vectores.

Ejemplo

¿Son los vectores $\vec{v}=(1,2,-1)$ y $\vec{w}=(2,4,-2)$ linealmente dependientes en V^3 ?

Dividimos sus componentes.

$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{-1}{-2}$ → Son proporcionales → Son dependientes

Ejemplo

¿Son los vectores $\vec{v}=(1,1)$ y $\vec{w}=(2,-3)$ linealmente dependientes en V^2 ?

Dividimos sus componentes.

$\frac{1}{2}\neq\frac{1}{-3}$ → No son proporcionales → Son independientes

Usar Gauss para comprobar si tres o más vectores son dependientes o independientes. Introducción al concepto de matriz de vectores y de rango

¿Qué ocurre si nos piden estudiar la dependencia o independencia lineal de tres o más vectores? ¿Tenemos que aplicar la definición formal? ¿No existe un método más rápido, como el que vimos en el apartado anterior para dos vectores?

Sí podemos agilizar los cálculos. Vamos a verlo.

Cuando aplicamos la definición formal de independencia lineal:

$$\alpha \cdot \vec{u}_1 + \beta \cdot \vec{u}_2 + \gamma \cdot \vec{u}_3 + \ldots + \delta \cdot \vec{u}_n = \vec{0}$$

Lo que obtenemos es un sistema de ecuaciones homogéneo (con todos los términos independientes igual a cero).cPodemos trabajar sin esa columna de términos independientes, que siempre estará formada por ceros, y formar con los vectores una matriz. Veámoslo, por ejemplo, con tres vectores en tres dimensiones $\vec{u}=(u_x, u_y, u_z)$, $\vec{v}=(v_x, v_y, v_z)$ y $\vec{w}=(w_x, w_y, w_z)$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} u_x & u_y & u_z & 0 \\ v_x & v_y & v_z & 0 \\ w_x & w_y & w_z & 0 \end{array}\right)$$ → Notación matricial del sistema de ecuaciones homogéneo

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{pmatrix}$$ → Matriz resultante de eliminar la columna de ceros

Sobre esta matriz, directamente, podemos aplicar Gauss. Es decir, buscamos hacer ceros por debajo o por encima de la diagonal principal.

Y razonamos de la siguiente manera: **el número de vectores no nulos que queden tras aplicar el método de Gauss es igual al número de vectores linealmente independientes de la matriz. A este número también se le llama rango de la matriz**.

Durante el método de Gauss, si aparece una fila con todos los términos nulos significa que el vector de esa fila es combinación lineal de los otros. Si aparecen dos filas con todos los términos iguales significa que existe combinación lineal entre los vectores de la matriz. Si hay dos filas con los coeficientes proporcionales, existe combinación lineal entre los vectores de la matriz. En estos casos podremos obviar una de las filas. Veamos varios ejemplos.

Ejemplo

¿Son independientes los vectores $\vec{u}=(1,2,-1)$, $\vec{v}=(0,2,-3)$ y $\vec{w}=(4,0,-1)$ en el espacio vectorial V^3 ?

Escribimos la matriz formada por los vectores (en filas o en columnas, da igual).

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aplicamos Gauss, buscando la matriz triangular por debajo de la diagonal principal.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow F_3'=F_3-4F_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & -8 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow F_3'=F_3+4F_2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Rango } 3$$

Una vez obtenida la matriz triangular comprobamos que hay tres filas con al menos una componente no nula. Significa que hay tres vectores linealmente independientes. O lo que es lo mismo, que la matriz formada por los vectores tiene rango 3.

Ejemplo

¿Son independientes los vectores $\vec{u}=(1,2,-1)$, $\vec{v}=(0,1,2)$ y $\vec{w}=(1,3,1)$ en el espacio vectorial V^3 ?

Escribimos la matriz formada por los vectores y aplicamos Gauss

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow F_3'=F_3-F_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Comprobamos que las dos últimas filas son idénticas, por lo que podemos obviar una de las filas (al existir combinación lineal).

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Obviamos } F_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Rango } 2$$

Hemos terminado Gauss, al haber hecho nulo el único coeficiente que había por debajo de la diagonal principal. Por lo tanto solo había 2 vectores linealmente independientes, por lo que los 3 vectores iniciales no son independientes entre sí.

Una conclusión obvia: **determinar el número de vectores linealmente independientes es lo mismo que calcular el rango**. En los ejercicios me pueden preguntar una cosa o la otra. Y los problemas se resuleven exactamente igual.

Ejemplo

Obtener el rango de la matriz formada por los vectores $\vec{u}=(1,0,-1)$, $\vec{v}=(3,0,-3)$ y $\vec{w}=(1,3,1)$ en el espacio vectorial V^3 .

Escribimos la matriz formada por los vectores y aplicamos Gauss

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow F_2'=F_2-3F_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

En la segunda fila tenemos todos los coeficientes nulos. Eso significa que ese vector es combinación lineal de los otros, por lo que podemos obviarlo.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Obviamos } F_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow F_2'=F_2-F_1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Rango } 2$$

Tras aplicar Gauss, haciendo ceros por debajo de la diagonal principal, encontramos dos filas con coeficientes no nulos. El rango de los vectores es 2. O lo que es lo mismo, de los tres vectores de partida hay 2 vectores linealmente independientes.

Estudiar el rango de una matriz de vectores en función de un parámetro

Cuando tenemos dos vectores en V^2 la matriz que forman puede tener rango 1 ó rango 2, según el número de vectores linealmente independientes.

Cuando tenemos tres vectores en V^3 la matriz que forman puede tener rango 1, 2 ó rango 3, según el número de vectores linealmente independientes.

Son muy comunes los ejercicios en que debemos determinar el rango de la matriz formada por un grupo de vectores, en función de un parámetro. Veamos un ejemplo y la forma de razonar en este tipo de ejercicios.

Ejemplo

Estudiar el rango de los vectores $\vec{u}=(1,-1,1)$, $\vec{v}=(2,1,a)$ y $\vec{w}=(0,3,1)$ en función del parámetro a .

Escribimos la matriz formada por los vectores.

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow F_2'=F_2-2F_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & a-2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$\rightarrow F_3'=F_3-F_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & a-2 \\ 0 & 0 & 3-a \end{pmatrix}$ → ¿Cuánto vale el rango?

La primera fila tiene al menos un coeficiente no nulo. La segunda fila también tiene al menos un coeficiente no nulo, independientemente del parámetro a . Y la tercera fila tiene dos coeficientes nulo y un tercer coeficiente que depende del parámetro a .

¿Cómo resolver? Estudiando qué valores del parámetro a hacne nulo los coeficientes de la diagonal principal.

En nuestro ejemplo, en la tercera fila tenemos → $3-a=0 \rightarrow a=3$

Realizamos la siguiente discusión de casos:

- Si $a\neq 3 \rightarrow 3-a\neq 0$ → La tercera fila tiene al menos un coeficiente no nulo → Tendremos tres vectores linealmente independientes → El rango es 3.

- Si $a=3$ → Sustituimos en la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ → Obviamos la tercera fila →

$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ → Tenemos dos vectores no nulos tras aplicar Gauss → Rango 2.

Ejemplo

Estudiar el rango de los vectores $\vec{u}=(1,a,3)$, $\vec{v}=(-1,2,3)$ y $\vec{w}=(0,3,1)$ en función del parámetro a .

Escribimos la matriz formada por los vectores.

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow F_2'=F_2+F_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 3 \\ 0 & 2+a & 6 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow F_3'=F_3+F_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 3 \\ 0 & 2+a & 6 \\ 0 & 2+a & 4 \end{pmatrix} \rightarrow F_3'=F_3-F_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 3 \\ 0 & 2+a & 6 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

¿Cuánto vale el rango? Estudiamos los coeficientes de la diagonal principal que pueden anularse según el parámetro a . Y encontramos en la segunda fila → $2+a=0$ → $a=-2$.

Realizamos la siguiente discusión de casos.

- Si $a\neq-2$ → Tendremos tres filas no nulas → Rango 3

- Si $a=-2$ → Sustituimos en la matriz → $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ → Las filas segunda y tercera son proporcionales → Podemos obviar una fila → $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ → Rango 2

Base de un espacio vectorial

Una base de un espacio vectorial es un conjunto de vectores que es **sistema generador y linealmente independiente**.

Definición de base de un espacio vectorial

Un conjunto de vectores $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$,..., $\vec{u}_n$ forman una base de un espacio vectorial si son un sistema generador y linealmente independientes.

Un espacio vectorial posee infinitas bases. Todas las bases de un espacio vectorial están formadas por el mismo número de vectores. Este número es la **dimensión del espacio vectorial**.

En V^2 todas las bases estarán formadas por dos vectores. En V^3 todas las bases estarán formadas por tres vectores. En general, en V^n todas las bases estarán formadas por n-vectores.

Para practicar...

Comprobar que los vectores $\vec{v}=(1,0,0)$, $\vec{w}=(0,1,0)$ y $\vec{t}=(0,0,1)$ forman una base en el espacio vectorial V^3 .

Una consecuencia directa es la siguiente:

- Si tengo 2 vectores linealmente independientes en V^2 , seguro que forman base, sin necesidad de demostrar que son sistema generador.
- Si tengo 3 vectores linealmente independientes en V^3 , seguro que forman base, sin necesidad de demostrar que son sistema generador.
- Si tengo 4 vectores linealmente independientes en V^4 , seguro que forman base, sin necesidad de demostrar que son sistema generador.
- Si tengo n vectores linealmente independientes en V^n , seguro que forman base, sin necesidad de demostrar que son sistema generador.