

Teoría – Tema 5

Espacios vectoriales

Índice de contenido

Puntos en 2 y 3 dimensiones.....	2
Vectores en el plano.....	5
Suma de vectores.....	7
Combinación lineal de vectores.....	8
Sistema generador.....	10
Vectores linealmente dependientes o sistema ligado.....	12
Vectores linealmente independientes o sistema libre.....	13
Método directo para comprobar si dos vectores son proporcionales (dependientes) o no proporcionales (independientes).....	14
Usar Gauss para comprobar si tres vectores son dependientes o independientes.	
Introducción al concepto de matriz de vectores y de rango.....	15
Base de un espacio vectorial.....	16

Puntos en 2 y 3 dimensiones

Ya conocemos el **cuerpo de los números reales** $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, donde definimos dos propiedades internas: la suma y el producto. Los elementos de este cuerpo los representamos en la recta real unidimensional.

También conocemos el **cuerpo de los números complejos** $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, que posee una suma y un producto como operaciones internas. Los elementos complejos no se representan en una recta, sino en el plano complejo bidimensional, ya que son un par de valores (a, b) .

Dentro de los complejos hemos hablado de vectores, como los segmentos orientados que unen el origen del plano complejo $(0,0)$ con el afijo $z=(a,b)$. Y sabemos que el módulo de un complejo es la longitud de su vector, y que el ángulo que forma con el semieje positivo real es su fase.

Pues bien, esta experiencia previa nos ayudará a comprender el **concepto de punto y de espacio vectorial**.

Si trabajamos en **dos dimensiones**, un punto P tendrá dos coordenadas (a, b) . Donde la primera coordenada a está asociada a la primera dimensión (que suele identificarse con el eje horizontal OX), y la segunda coordenada b está asociada a la segunda dimensión (que suele identificarse con el eje horizontal OY).

Tanto el eje OX como el eje OY son perpendiculares entre sí, formando lo que se conoce como **sistema cartesiano**. Por eso, la pareja de valores (a, b) también se denomina producto cartesiano $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b) / a, b \in \mathbb{R}\}$.

Si hablamos de **tres dimensiones**, añadimos una tercera coordenada a los puntos: (a, b, c) . Esta tercera coordenada suele asociarse a un eje OZ perpendicular a los otros dos. Y se habla del conjunto $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b, c) / a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

Por lo general podemos hablar de **n-dimensiones**, de tal forma que un punto vendrá representado por n-coordenadas (a, b, c, \dots, n) . Y tendremos el conjunto $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b, c, \dots, n) / a, b, c, \dots, n \in \mathbb{R}\}$

En bachillerato trabajaremos, por lo general, en dos y tres dimensiones. Por lo que vamos a centrar nuestro estudio a \mathbb{R}^2 y a \mathbb{R}^3 .

Dos puntos son iguales si sus componentes son iguales y están en el mismo orden.

$$(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$$

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c, b = d$$

Si hablamos de igualdad de puntos en \mathbb{R}^3 , solo deberemos ampliar la igualdad a la tercera componente.

Vamos a definir una operación interna para los puntos: la suma. Es una operación interna, como ya sabemos, porque el resultado final pertenece al mismo cuerpo al que pertenecen los sumandos. Es decir, la suma de dos puntos genera un nuevo punto.

Suma de elementos de \mathbb{R}^2

$$(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$$

$$(a, b) + (c, d) = (a + b, c + d) \in \mathbb{R}^2$$

Esta suma es:

- **Asociativa.**
- **Conmutativa.**
- Posee **elemento neutro** $(0, 0)$.
- Posee **elemento simétrico** $(-a, -b)$, que al sumarlo al punto (a, b) da lugar al elemento neutro. El elemento simétrico de la suma es el elemento opuesto.

Con esto, decimos que $(\mathbb{R}^2, +)$ tiene estructura matemática de **grupo abeliano**. En \mathbb{R}^3 la suma cumple las mismas propiedades, añadiendo la tercera coordenada a nuestro razonamiento.

Consideremos ahora el producto de números reales del cuerpo \mathbb{R} (una dimensión). Vamos a aplicar este producto a la pareja de valores de \mathbb{R}^2 . Y llamaremos **escalares** a los números reales que se multiplican sobre los **pares ordenados** de \mathbb{R}^2 .

Producto de escalar por par ordenado

$$k \in \mathbb{R} \rightarrow \text{escalar}$$

$$(a, b) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \text{par ordenado}$$

$$k \cdot (a, b) = (k \cdot a, k \cdot b) \in \mathbb{R}^2$$

Esta multiplicación cumple las siguientes propiedades:

- Propiedad distributiva del producto de escalares respecto a la suma de pares ordenados.

$$\begin{aligned} k &\in \mathbb{R} \\ (a, b), (c, d) &\in \mathbb{R}^2 \\ k \cdot [(a, b) + (c, d)] &= k \cdot (a, b) + k \cdot (c, d) \end{aligned}$$

- Propiedad distributiva de la suma de escalares respecto del producto por un par ordenador.

$$\begin{aligned} k_1, k_2 &\in \mathbb{R} \\ (a, b) &\in \mathbb{R}^2 \\ (k_1 + k_2) \cdot (a, b) &= k_1 \cdot (a, b) + k_2 \cdot (a, b) \end{aligned}$$

- Propiedad asociativa mixta.

$$\begin{aligned} k_1, k_2 &\in \mathbb{R} \\ (a, b) &\in \mathbb{R}^2 \\ k_1 \cdot [k_2 \cdot (a, b)] &= (k_1 \cdot k_2) \cdot (a, b) \end{aligned}$$

- Elemento neutro para el producto de un escalar por un par ordenador.

$$\begin{aligned} 1 &\in \mathbb{R} \\ (a, b) &\in \mathbb{R}^2 \\ 1 \cdot (a, b) &= (1 \cdot a, 1 \cdot b) = (a, b) \end{aligned}$$

Con estas definiciones y propiedades se afirma que $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ tiene estructura matemática de **espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales**. Donde $+$ indica la suma pares ordenados y \cdot el producto de un escalar por un par ordenado.

Análogamente, se afirma lo mismo para $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$. Y en general, para $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$.

Vectores en el plano

El paso del par ordenado de los puntos de \mathbb{R}^2 al concepto de vector en el plano es inmediato.

Definición de vector

Dados dos puntos A y B , llamamos vector \overrightarrow{AB} al segmento orientado que va del punto A al punto B . Al punto A se le llama **origen** del vector, y al punto B **extremo**.

El **módulo** del vector es la longitud del segmento determinado por los puntos origen y extremo.

La **dirección** es la recta que une los puntos origen y extremo, y la de sus rectas paralelas.

El **sentido** es el del recorrido desde el origen al extremo.

Conocidos los puntos origen y extremo de un vector, conocemos de manera única las componentes del vector.

Componentes del vector

Dados dos puntos $A(a_x, a_y)$ y $B(b_x, b_y)$, la coordenada horizontal y vertical del vector \overrightarrow{AB} vienen dadas por:

$$x = b_x - a_x$$

$$y = b_y - a_y$$

$$\overrightarrow{AB} = (x, y)$$

Si trabajamos en tres dimensiones, tendremos un vector $\overrightarrow{AB} = (x, y, z)$, donde $z = b_z - a_z$.

Vectores equipolentes

Dos vectores son equipolentes si tiene el mismo módulo, dirección y sentido.

Dos vectores equipolentes pueden estar distribuidos por cualquier zona del plano.

Por ejemplo, los puntos $A(2,4)$ y $B(6,10)$ generan el vector $\overrightarrow{AB} = (6-2, 10-4) = (4,6)$. A su vez, los puntos $C(5,7)$ y $D(9,11)$ generan el vector $\overrightarrow{CD} = (9-5, 11-7) = (4,6)$. Los vectores \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{CD} son equipolentes, el primero con origen en el punto A y el

segundo con origen en el punto C . Y así, habrá infinitos vectores equipolentes a \vec{AB} y a \vec{CD} (uno por cada punto del plano que sea origen del vector).

Al conjunto formado por un vector y sus infinitos equipolentes, se le llama **vector libre**. Y al representante único de un vector libre que tiene su origen en el origen de coordenadas $O(0,0)$ lo llamamos **representante canónico** de dicho vector.

En nuestro ejemplo el representante canónico sería el vector con origen el punto $O(0,0)$ y extremo $P(4,6)$, que genera el vector $\vec{OP} = (4-0, 6-0) = (4,6)$.

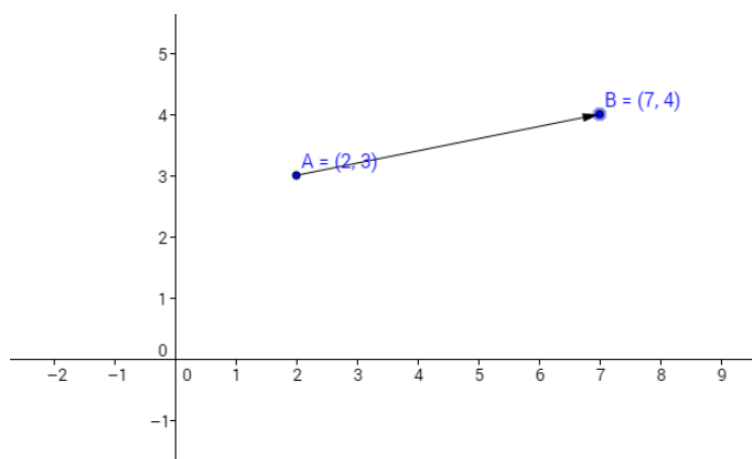
Nomenclatura

Si conocemos el punto origen $A(a_x, a_y)$ y el punto extremo $B(b_x, b_y)$ de un vector, lo representamos como $\vec{AB} = (x, y)$, de coordenadas $x = b_x - a_x$, $y = b_y - a_y$.

Otra opción sería representar el vector con una **letra minúscula**: $\vec{u} = (x, y)$. En este caso asumimos que trabajamos con el representante canónico del vector, con origen en el punto $O(0,0)$ y extremo $P(x, y)$, de tal forma que $\vec{u} = \vec{OP} = (x-0, y-0) = (x, y)$.

Si al trabajar con el par ordenado $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ decíamos que $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ forma un espacio vectorial, ahora diremos lo mismo para los vectores. Estos vectores formarán el espacio vectorial $(V^2, +, \cdot)$. Los elementos de V^2 ya no son un par ordenado, sino vectores. Es decir, $\vec{u} \in V^2$.

vector \vec{AB} con origen $A(2,3)$ y extremo $B(7,4)$



Suma de vectores

Dados dos vectores $\vec{u}=(a,b), \vec{v}=(c,d) \in V^2$, definimos la suma y la diferencia de vectores de la forma:

$$\vec{u}+\vec{v}=(a+c, b+d)$$

$$\vec{u}-\vec{v}=(a-c, b-d)$$

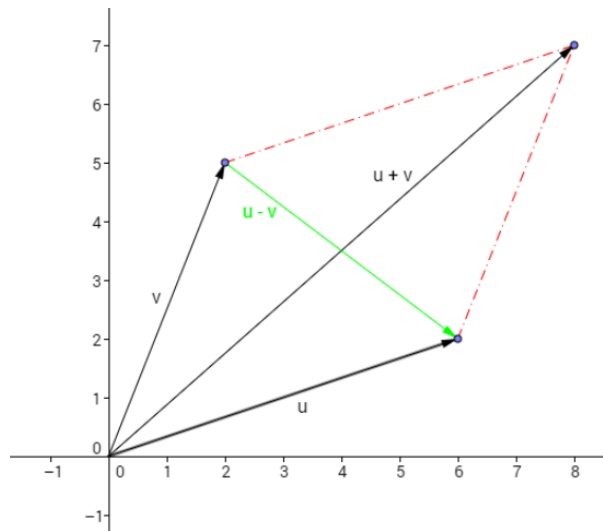
El resultado de estas operaciones es un nuevo elemento del espacio vectorial V^2 , por eso la suma de vectores es una operación interna del espacio vectorial.

La diferencia de vectores también podemos verla como la suma del primer vector más el opuesto del segundo.

¿Cómo entender **gráficamente** la suma y la diferencia de vectores?

Si trazamos paralelas por los extremos finales de \vec{u} y \vec{v} para formar un paralelogramo, la suma es la diagonal mayor del paralelogramo. Y la resta es la diagonal menor.

suma y diferencia de vectores



En tres dimensiones los vectores $\vec{u}=(x_1, y_1, z_1), \vec{v}=(x_2, y_2, z_2) \in V^3$ se suman y restan:

$$\vec{u}+\vec{v}=(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)$$

$$\vec{u}-\vec{v}=(x_1-x_2, y_1-y_2, z_1-z_2)$$

Combinación lineal de vectores

Sea el vector $\vec{u} \in V^2$. Decimos que es **combinación lineal** de otros dos vectores $\vec{v}, \vec{w} \in V^2$ si podemos expresar \vec{u} de la forma:

$$\vec{u} = \alpha \cdot \vec{v} + \beta \cdot \vec{w}$$

Ejemplo

¿Podemos expresar $\vec{u} = (3,5)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{v} = (1,2)$ y $\vec{w} = (-2,3)$?

Planteamos la definición de combinación lineal:

$$(3,5) = \alpha \cdot (1,2) + \beta \cdot (-2,3) \rightarrow (3,5) = (\alpha - 2 \cdot \beta, 2 \cdot \alpha + 3 \cdot \beta) \rightarrow (3,5) = (\alpha - 2 \cdot \beta, 2 \cdot \alpha + 3 \cdot \beta)$$

Iguales componentes (primera coordenada igual a primera coordenada, segunda coordenada igual a segunda coordenada):

$$\begin{cases} 3 = \alpha - 2 \cdot \beta \\ 5 = 2 \cdot \alpha + 3 \cdot \beta \end{cases}$$

Obteniendo un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas que debemos resolver.

De la primera ecuación del sistema podemos despejar $\alpha \rightarrow \alpha = 3 + 2 \cdot \beta \rightarrow$ Y sustituimos en la segunda ecuación:

$$5 = 2 \cdot \alpha + 3 \cdot \beta \rightarrow 5 = 2 \cdot (3 + 2 \cdot \beta) + 3 \cdot \beta \rightarrow 5 = 6 + 4 \cdot \beta + 3 \cdot \beta \rightarrow -1 = 7 \cdot \beta \rightarrow \beta = \frac{-1}{7}$$

Con el valor de β obtenemos $\alpha \rightarrow \alpha = 3 + 2 \cdot \beta \rightarrow \alpha = 3 + 2 \cdot \left(\frac{-1}{7}\right) \rightarrow \alpha = \frac{19}{7}$

Podemos expresar $\vec{u} = (3,5)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{v} = (1,2)$ y $\vec{w} = (-2,3)$.

$$(3,5) = \frac{19}{7} \cdot (1,2) + \frac{-1}{7} \cdot (-2,3)$$

Si extendemos esta definición a tres dimensiones, tendremos por lo general una terna de tres vectores:

$$\vec{u} = \alpha \cdot \vec{v} + \beta \cdot \vec{w} + \gamma \cdot \vec{t}$$

Ejemplo

¿Podemos expresar $\vec{u} = (-2, 1, 1)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{v} = (1, 0, 0)$, $\vec{w} = (0, 1, 0)$ y $\vec{t} = (0, 0, 1)$?

Planteamos la definición de combinación lineal:

$$(-2, 1, 1) = \alpha \cdot (1, 0, 0) + \beta \cdot (0, 1, 0) + \gamma \cdot (0, 0, 1) \rightarrow (-2, 1, 1) = (\alpha, \beta, \gamma)$$

Igualamos componentes (primera coordenada igual a primera coordenada, segunda coordenada igual a segunda coordenada, tercera coordenada igual a tercera coordenada):

$$\begin{cases} -2 = \alpha \\ 1 = \beta \\ 1 = \gamma \end{cases}$$

Obteniendo un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas, cuya solución es directa.

Podemos expresar $\vec{u} = (-2, 1, 1)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{v} = (1, 0, 0)$, $\vec{w} = (0, 1, 0)$ y $\vec{t} = (0, 0, 1)$.

$$(-2, 1, 1) = .2 \cdot (1, 0, 0) + (0, 1, 0) + (0, 0, 1)$$

El concepto de combinación lineal podemos extenderlo a un conjunto de cuatro, cinco, seis,... o n-vectores.

Sistema generador

Un conjunto de vectores se dice que es un **sistema generador** de los vectores del espacio vectorial al que pertenecen, si cualquier vector de dicho espacio puede expresarse como combinación lineal de ese conjunto de vectores.

En dos dimensiones, diremos que el conjunto formado por \vec{v} y \vec{w} son un sistema generador en V^2 si para cualquier vector $\vec{u}=(x, y) \in V^2$ se cumple:

$$(x, y) = \alpha \cdot \vec{v} + \beta \cdot \vec{w}$$

En tres dimensiones, diremos que el conjunto formado por \vec{v} , \vec{w} y \vec{t} son un sistema generador en V^3 si para cualquier vector $\vec{u}=(x, y, z) \in V^3$ se cumple:

$$(x, y, z) = \alpha \cdot \vec{v} + \beta \cdot \vec{w} + \gamma \cdot \vec{t}$$

En general, para un sistema generador en V^n necesitaremos al menos n-vectores.

Ejemplo

¿Forman los vectores $\vec{v}=(1,1)$ y $\vec{w}=(2,-3)$ un sistema generador en V^2 ?

Planteamos la definición de sistema generador:

$$(x, y) = \alpha \cdot (1,1) + \beta \cdot (2,-3) \rightarrow (x, y) = (\alpha + 2 \cdot \beta, \alpha - 3 \cdot \beta)$$

Igualamos componentes y tenemos un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (las incógnitas son los parámetros α y β).

$$\begin{cases} x = \alpha + 2 \cdot \beta \\ y = \alpha - 3 \cdot \beta \end{cases}$$

Si restamos ambas ecuaciones podemos obtener el valor del parámetro β en función de x , y .

$$x - y = 5 \cdot \beta \rightarrow \beta = \frac{x - y}{5}$$

Y el valor de α resulta:

$$x = \alpha + 2 \cdot \frac{x - y}{5} \rightarrow \alpha = \frac{3x + 2y}{5}$$

Es decir, dado un vector arbitrario $\vec{u}=(x, y)$ siempre podemos expresarlo en función del sistema generador $\vec{v}=(1,1)$ y $\vec{w}=(2,-3)$ a partir de los valores de α y β .

Ejemplo

¿Forman los vectores $\vec{v}=(1,1,0)$, $\vec{w}=(2,-3,0)$ y $\vec{t}=(-1,4,0)$ un sistema generador en V^3 ?

Planteamos la definición de sistema generador:

$$(x, y, z) = \alpha \cdot (1, 1, 0) + \beta \cdot (2, -3, 0) + \gamma \cdot (-1, 4, 0) \rightarrow (x, y, z) = (\alpha + 2 \cdot \beta - \gamma, \alpha - 3 \cdot \beta + 4 \cdot \gamma, 0)$$

Igualamos componentes y tenemos un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas (las incógnitas son los parámetros α , β y γ).

$$\begin{cases} x = \alpha + 2 \cdot \beta - \gamma \\ y = \alpha - 3 \cdot \beta + 4 \cdot \gamma \\ z = 0 \end{cases}$$

Si expresamos matricialmente el sistema (recordamos que las incógnitas son los parámetros α , β y γ).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & x \\ 1 & -3 & 4 & y \\ 0 & 0 & 0 & z \end{array} \right)$$

La última fila muestra una incongruencia: $0=z$. ¿Por qué es una incongruencia? Porque estamos trabajando con un vector arbitrario $\vec{u}=(x, y, z)$, y lógicamente z puede tomar cualquier valor... no solo el valor 0 .

Por lo tanto, debido a esta incongruencia o absurdo matemático, nuestro sistema no tiene solución. Es decir, los vectores $\vec{v}=(1,1,0)$, $\vec{w}=(2,-3,0)$ y $\vec{t}=(-1,4,0)$ no forman un sistema generador en V^3 .

Vectores linealmente dependientes o sistema ligado

Un conjunto de vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \dots, \vec{u}_n$ de un espacio vectorial son **linealmente dependientes** si cumplen:

$$\alpha \cdot \vec{u}_1 + \beta \cdot \vec{u}_2 + \gamma \cdot \vec{u}_3 + \dots + \delta \cdot \vec{u}_n = \vec{0} \rightarrow \text{con al menos un coeficiente } \alpha, \beta, \gamma, \dots, \delta \text{ no nulo.}$$

A un sistema de vectores linealmente dependientes se le denomina **sistema ligado de vectores**. El factor $\vec{0}$ indica el vector nulo.

Ejemplo

¿Son los vectores $\vec{v}=(1,1)$ y $\vec{w}=(2,-3)$ linealmente dependientes en V^2 ?

Planteamos la definición de dependencia lineal:

$$\alpha \cdot (1,1) + \beta \cdot (2,-3) = \vec{0} \rightarrow (\alpha + 2 \cdot \beta, \alpha - 3 \cdot \beta) = (0,0)$$

Igualamos componentes y tenemos un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (las incógnitas son los parámetros α y β).

$$\begin{cases} \alpha + 2 \cdot \beta = 0 \\ \alpha - 3 \cdot \beta = 0 \end{cases}$$

Y este sistema tiene como solución única $\alpha=0$ y $\beta=0$. Por lo tanto, los vectores $\vec{v}=(1,1)$ y $\vec{w}=(2,-3)$ no son linealmente dependientes.

Ejemplo

¿Son los vectores $\vec{v}=(1,1)$, $\vec{w}=(2,-3)$ y $\vec{t}=(-1,0)$ linealmente dependientes ?

Planteamos la definición de dependencia lineal:

$$\alpha \cdot (1,1) + \beta \cdot (2,-3) + \gamma \cdot (-1,0) = \vec{0} \rightarrow (\alpha + 2 \cdot \beta - \gamma, \alpha - 3 \cdot \beta) = (0,0)$$

Llegamos a un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas con infinitas soluciones.

$$\begin{cases} \alpha + 2 \cdot \beta - \gamma = 0 \\ \alpha - 3 \cdot \beta = 0 \end{cases}$$

De la segunda ecuación despejamos el valor de $\alpha \rightarrow \alpha = 3 \cdot \beta$

Y llevamos este valor a la primera ecuación $\rightarrow 3 \cdot \beta + 2 \cdot \beta - \gamma = 0 \rightarrow 5 \cdot \beta = \gamma$

Llegamos a una ecuación con dos incógnitas \rightarrow una de esas incógnitas será un parámetro arbitrario no nulo \rightarrow por ejemplo $\gamma=1 \rightarrow \beta=\frac{1}{5} \rightarrow \alpha=\frac{3}{5} \rightarrow$ Los vectores son linealmente dependientes.

■ Vectores linealmente independientes o sistema libre

Un conjunto de vectores \vec{u}_1 , \vec{u}_2 , \vec{u}_3 , ..., \vec{u}_n de un espacio vectorial son **linealmente independientes** si se cumple:

$$\alpha \cdot \vec{u}_1 + \beta \cdot \vec{u}_2 + \gamma \cdot \vec{u}_3 + \dots + \delta \cdot \vec{u}_n = \vec{0} \rightarrow \text{con } \alpha = \beta = \gamma = \dots = \delta = 0 \rightarrow \text{Todos los coeficientes nulos.}$$

A un sistema de vectores linealmente independientes se le denomina **sistema libre de vectores**. El factor $\vec{0}$ indica el vector nulo.

Para practicar...

Comprobar que los vectores $\vec{v}=(1,0,0)$, $\vec{w}=(0,1,0)$ y $\vec{t}=(0,0,1)$ son un sistema libre de vectores en V^3 .

Método directo para comprobar si dos vectores son proporcionales (dependientes) o no proporcionales (independientes)

En proceso...

Usar Gauss para comprobar si tres vectores son dependientes o independientes. Introducción al concepto de matriz de vectores y de rango

En proceso...

Base de un espacio vectorial

Una base de un espacio vectorial es un conjunto de vectores que es **sistema generador y linealmente independiente**.

Definición de base de un espacio vectorial

Un conjunto de vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \dots, \vec{u}_n$ forman una base de un espacio vectorial si son un sistema generador y linealmente independientes.

Un espacio vectorial posee infinitas bases. Todas las bases de un espacio vectorial están formadas por el mismo número de vectores. Este número es la **dimensión del espacio vectorial**.

En V^2 todas las bases estarán formadas por dos vectores. En V^3 todas las bases estarán formadas por tres vectores. En general, en V^n todas las bases estarán formadas por n-vectores.

Para practicar...

Comprobar que los vectores $\vec{v}=(1,0,0)$, $\vec{w}=(0,1,0)$ y $\vec{t}=(0,0,1)$ forman una base en el espacio vectorial V^3 .