Problemas – Tema 5

Solución a problemas de vectores - Hoja 5 - Todos resueltos

Hoja 5. Problema 1

1. Sean los vectores $\vec{u}=(3,-4)$ y $\vec{v}=(5,6)$. Calcula:

a) Módulos y argumentos (ángulo con semieje positivo horizontal) de ambos vectores.

b) El producto escalar $\vec{u}\cdot\vec{v}$ y el ángulo que forman los dos vectores entre sí.

c) Normalización del vector $\vec{u}$.

d) Un vector ortogonal a $\vec{v}$.

a) $|\vec{u}|=\sqrt{9+16}=5 \rightarrow \alpha=arcotg(\frac{-4}{3})=-53,13^{o}=306,87^{o}$

$|\vec{v}|=\sqrt{25+36}=\sqrt{61} \rightarrow \beta=arcotg(\frac{6}{5})=50,19^{o}$

b) $\vec{u}\cdot\vec{v}=3\cdot5-4\cdot6=15-24=-9$

$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\gamma) \rightarrow \cos(\gamma)=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{-9}{5\cdot\sqrt{61}}=-0,23 \rightarrow \gamma=103,32^{o}$

c) $\hat{u}=\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \rightarrow \hat{u}=\frac{(3,-4)}{5}=(\frac{3}{5},\frac{-4}{5})$

d) Para obtener un vector perpendicular a $\vec{v}=(5,6)$, intercambiamos las posiciones de las componentes de $\vec{v}$ y cambiamos el signo a una de ellas. Así, los siguientes dos vectores son perpendiculares a $\vec{v}$:

$\vec{w}=(-6,5)$

$\vec{t}=(6,-5)$

Hoja 5. Problema 2

2. Sea el polígono irregular de cuatro lados, con vértices consecutivos en los puntos $A(2,3)$, $B(4,-5)$, $C(8,5)$ y $D(5,1)$.

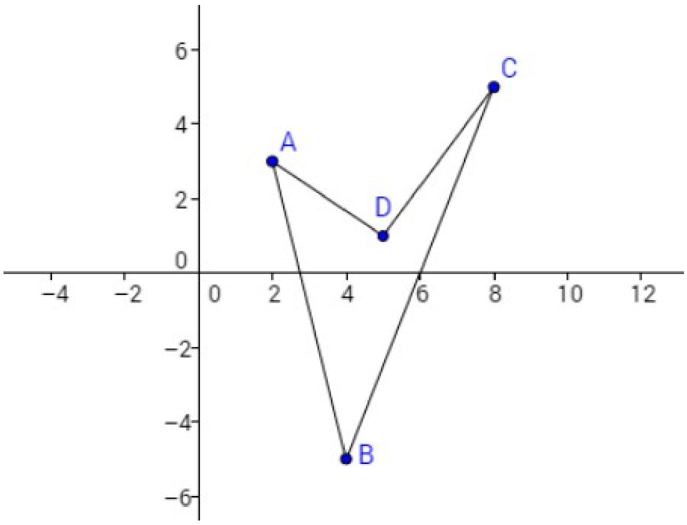
a) Representar el polígono gráficamente y obtener su perímetro (trabajar con raíces, no usar decimales).

b) $\vec{AB}\cdot\vec{AD}$

c) Ángulo en el vértice A

d) $|\vec{BD}|$

a) Representación gráfica del polígono.



Su perímetro es la suma de los módulos de los vectores que forman sus lados.

$$\vec{AB}=(4-2,-5-3)=(2,-8) \quad\rightarrow\quad |\vec{AB}|=\sqrt{68}$$

$$\vec{BC}=(8-4,5+5)=(4,10) \quad\rightarrow\quad |\vec{BC}|=\sqrt{116}$$

$$\vec{CD}=(5-8,1-5)=(-3,-4) \quad\rightarrow\quad |\vec{CD}|=\sqrt{25}=5$$

$$\vec{DA}=(2-5,3-1)=(-3,2) \quad\rightarrow\quad |\vec{DA}|=\sqrt{13}$$

Perímetro $\rightarrow$ $P=\sqrt{68}+\sqrt{116}+5+\sqrt{13}$ *unidades*

b) El vector $\vec{AD}=-\vec{DA}=(3,-2) \rightarrow \vec{AB}\cdot\vec{AD}=2\cdot3+8\cdot2=22$

c) $\vec{AB}\cdot\vec{AD}=|\vec{AB}|\cdot|\vec{AD}|\cdot\cos(\alpha) \rightarrow \cos(\alpha)=\frac{\vec{AB}\cdot\vec{AD}}{|\vec{AB}|\cdot|\vec{AD}|}=\frac{22}{\sqrt{68}\cdot\sqrt{13}}=0,74 \rightarrow \alpha=42,27^{o}$

Elegimos el vector del primer cuadrante (coseno positivo) ya que, gráficamente, vemos que el ángulo en el vértice A es agudo (menor de $90º$).

d) $\vec{BD}=(5-4,1+5)=(1,6) \rightarrow |\vec{BD}|=\sqrt{37}$

Hoja 5. Problema 3

3. Demostrar analíticamente que los siguientes vectores forman una base ortogonal en V^3 : $\vec{u}=(2,2,0)$, $\vec{v}=(-2,2,0)$, $\vec{w}=(0,0,2)$.

Para formar una base, el conjunto de vectores debe ser linealmente independientes y sistema generador.

Son linealmente independientes si el siguiente sistema tiene solución única $(0,0,0)$.

$$a\cdot\vec{u}+b\cdot\vec{v}+c\cdot\vec{w}=\vec{0}$$

$$\begin{Bmatrix} 2a-2b=0 \\ 2a+2b=0 \\ 2c=0 \end{Bmatrix} \rightarrow c=0 \rightarrow \begin{Bmatrix} 2a-2b=0 \\ 2a+2b=0 \end{Bmatrix} \rightarrow a=0 \ , \ b=0$$

Tenemos, por tanto, un sistema compatible determinado → Solución única → Los vectores son linealmente independientes.

Para formar sistema generador, cualquier vector arbitrario (x,y,z) debe poder expresarse como combinación lineal de los tres vectores.

$$a\cdot\vec{u}+b\cdot\vec{v}+c\cdot\vec{w}=(x,y,z)$$

$$\begin{Bmatrix} 2a-2b=x \\ 2a+2b=y \\ 2c=z \end{Bmatrix} \rightarrow c=\frac{z}{2} \rightarrow \begin{Bmatrix} 2a-2b=x \\ 2a+2b=y \end{Bmatrix} \rightarrow a=\frac{x+y}{4} \ , \ b=\frac{y-x}{4}$$

Por tanto, podemos expresar los coeficientes a,b,c en función de los valores (x,y,z) del vector arbitrario → Sistema generador.

Ya hemos demostrado que forman una base. Para que sea ortogonal, sus vectores deben ser perpendiculares dos a dos. Para demostrarlo, recordamos que el producto escalar de dos vectores perpendiculares (ángulo de 90º) es cero.

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=2\cdot(-2)+2\cdot 2+0\cdot 0=0$$

$$\vec{u}\cdot\vec{w}=2\cdot 0+2\cdot 0+0\cdot 2=0$$

$$\vec{v}\cdot\vec{w}=-2\cdot 0+2\cdot 0+0\cdot 2=0$$

Es decir, todos los vectores son perpendiculares entre si → Base ortogonal.

Hoja 5. Problema 4

4. a) Dados los puntos $A(\frac{-1}{2},a)$, $B(1,0)$ y $C(\frac{-1}{2},-a)$, halla el valor de a para que el triángulo ABC sea equilátero.

b) Para $a=1$ obtener el ángulo del vértice B usando el producto escalar de vectores (elegir valor del primer cuadrante).

a) El triángulo será equilátero si sus tres lados son iguales (y, en consecuencia, los ángulos intrernos será de 60º cada uno).

La longitud de cada lado coincide con el módulo de los vectores que lo forman. Es decir:

$$\vec{AB}=(1+\frac{1}{2},0-3)=(\frac{3}{2},-a) \rightarrow |\vec{AB}|=\sqrt{\frac{9+4a^2}{4}}$$

$$\vec{AC}=(\frac{-1}{2}+\frac{1}{2},-a-a)=(0,-2\mathrm{a}) \rightarrow |\vec{AC}|=2a$$

$$\vec{BC}=(\frac{-1}{2}-1,-a-0)=(\frac{-3}{2},-a) \rightarrow |\vec{BC}|=\sqrt{\frac{9+4a^2}{4}}$$

Igualamos módulos para obtener lados de la misma longitud:

$$\sqrt{\frac{9+4a^2}{4}}=2a \rightarrow \frac{9+4a^2}{4}=4a^2 \rightarrow 9+4a^2=16a^2 \rightarrow a=\frac{\pm\sqrt{3}}{2}$$

b) Si $a=1$ tendremos $\vec{AB}=(\frac{3}{2},-1) \rightarrow \vec{BA}=(\frac{-3}{2},1)$, $\vec{BC}=(\frac{-3}{2},-1)$

Si aplicamos el siguiente producto escalar, podemos obtener el ángulo del primer cuadrante en B :

$$\vec{BA}\cdot\vec{BC}=|\vec{BA}|\cdot|\vec{BC}|\cdot\cos(\beta) \rightarrow \cos(\beta)=\frac{\vec{BA}\cdot\vec{BC}}{|\vec{BA}|\cdot|\vec{BC}|}=\frac{\frac{9}{4}-1}{\sqrt{\frac{13}{4}}\cdot\sqrt{\frac{13}{4}}}=0{,}385 \rightarrow \beta=67{,}38^o$$