Problemas – Tema 5

Solución a problemas de vectores - Hoja 4 - Problemas 2, 3, 4

Hoja 4. Problema 2

Calcula el valor de m **para que los vectores** $\vec{u}=(m,1,3)$ **,** $\vec{v}=(0,m,-4)$ **,** $\vec{w}=(1,2,-1)$ **sean linealmente independientes.**

Planteamos la definición de independencia lineal, y forzamos que la solución del sistema sea única (solución trivial).

$$a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}=(0,0,0) \rightarrow \left\{\begin{matrix} ma+c=0 \\ a+mb+2c=0 \\ 3a-4b-c=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} m & 0 & 1 & 0 \\ 1 & m & 2 & 0 \\ 3 & -4 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow F_3 \leftrightarrow F_1 \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & -1 & 0 \\ 1 & m & 2 & 0 \\ m & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow F_2'=3F_2-F_1 \ , \ F_3'=3F_3-mF_1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 3m+4 & 7 & 0 \\ 0 & 4m & 3+m & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$F_3'=(3m+4)F_3-4mF_2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 3m+4 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 3m^2-15m+12 & 0 \end{array}\right)$$

De la tercera ecuación → $(3m^2-15m+12)c=0$ → La solución única será $c=0$ siempre y cuando $3m^2-15m+12\neq 0$ → Resolvemos la inecuación:

$$m\neq\frac{15\pm\sqrt{225-144}}{6} \rightarrow m\neq\frac{15\pm 9}{6} \rightarrow m\neq 1 \ , \ m\neq 4$$

Si $c=0$ → De la segunda ecuación → $(3m+4)b=0$ → La solución única será $b=0$ siempre y cuando $3m+4\neq 0$ → $m\neq\frac{-4}{3}$ → Este valor no lo consideramos porque invalidaría una de las transformaciones lineales aplicadas en el método de Gauss.

Hoja 4. Problema 3

Dados los vectores $\vec{u}=(5,-1)$, $\vec{v}=(m,6)$, $\vec{w}=(2,n)$.

a) Calcular el valor de m para que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean perpendiculares.

b) Calcular el valor de n para que $\vec{u}$ y $\vec{w}$ sean perpendiculares.

c) Normalizar los vectores.

a) Dos vectores son perpendiculares si su producto escalar es nulo.

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \rightarrow (5,-1)(m,6)=0 \rightarrow 5m-6=0 \rightarrow m=\frac{6}{5}$$

b) $\vec{u}\cdot\vec{w}=0 \rightarrow (5,-1)(2,n)=0 \rightarrow 10-n=0 \rightarrow n=10$

c) $|\vec{u}|=\sqrt{25+1}=\sqrt{26} \rightarrow \hat{u}=\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}=\left(\frac{5}{\sqrt{26}},\frac{-1}{\sqrt{26}}\right)$

$$|\vec{v}|=\sqrt{m^2+36} \rightarrow \hat{v}=\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}=\left(\frac{m}{\sqrt{m^2+36}},\frac{6}{\sqrt{m^2+36}}\right)$$

$$|\vec{w}|=\sqrt{4+n^2} \rightarrow \hat{w}=\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|}=\left(\frac{2}{\sqrt{4+n^2}},\frac{n}{\sqrt{4+n^2}}\right)$$

Hoja 4. Problema 4

Resuelto por Marta Gómez (Febrero 2016)

4. Calcula el ángulo que forman $\vec{u}=(3,0)$ **y** $\vec{v}=(1,\sqrt{3})$ **.**

$$\cos(\alpha)=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{3\cdot 1+0\cdot\sqrt{3}}{3\cdot 2}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \alpha=60^{\circ}$$